ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

УДК 517.946

Г.А. Павлов

РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛ

При решении различных задач, особенно в численных методах, используются рекуррентные формулы. Так, при численном решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка используются рекуррентные формулы второго порядка. Так как данный класс уравнений встречается при решении различных задач теоретической механики, физики и в других научных направлениях, то решение таких формул представляет определенный интерес. С другой стороны, в литературе встречается мнение, что их нельзя решить аналитически (то есть не существует общей формулы этой задачи). Мы опровергнем данное мнение.

Рассмотрим простейшую формулу первого порядка, решение которой не представляет затруднения. Она имеет вид:

$$U_{n+1} = a_n \cdot U_n + b_n,$$

где a_n, b_n – некоторые числовые последовательности.

Будем сначала считать, что $a_n \neq 0$. Тогда, если мы рассмотрим

$$U_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot y_n$$

или в виде $U_n = \left(\prod_{\kappa=1}^{n-1} a_\kappa\right) \cdot y_n$, то получим

$$y_{n+1} = y_n + \frac{b_n}{\prod_{\kappa=1}^{n} a_\kappa},$$

отсюда $y_n = y_1 + \sum_{\kappa=2}^{n-1} \frac{C_\kappa}{\prod_{m=1}^{\kappa-1} a_\kappa}$, и поэтому U_n равно:

$$U_n = \prod_{\kappa=1}^{n-1} \cdot a_\kappa \cdot y_1 + \sum_{\kappa=2}^{n-1}\left(\prod_{m=\kappa}^{n-1} a_\kappa\right) \cdot b_\kappa. \quad (1)$$

Нас интересует не вид формулы, а то, что она существует. Мы рассмотрели случай $a_n \neq 0$. Очевидно, эту формулу надо использовать для случая $a_n \neq 0$. В случае $a_n \neq 0$ мы сразу же определим

U_{n+1} и, считая это за первый член, опять можем выписать формулу (1).

Рассмотрим теперь линейную формулу второго порядка. Она имеет вид:

$$U_{n+1} = a_n \cdot U_n + b_n \cdot U_{n-1} + C_n .$$

Покажем, что для нее тоже существует аналитическое решение. Можно поступить так же, как в первом случае $(a_n \neq 0)$, введя замену, и свести ее к случаю $a_n = 1$. Но мы поступим иначе, выполнив преобразование:

$$(U_{n+1} - x_n \cdot U_n) = (a_n - x_n) \cdot \left[U_n + \frac{b_n}{a_n - x_n} \cdot U_{n-1} \right] \cdot C_n \cdot$$

Пусть $b_n / (a_n - x_n) = -x_{n-1}$, тогда, обозначая $U_{n+1} - x_n \cdot U = Z_{n+1}$, получим следующую формулу:

$$Z_{n+1} = (a_n - x_n) \cdot Z_n + C_n ,$$

т.е. для Z_n получена формула первого порядка. Следовательно, мы можем (если определено x_n) получить формулу для Z_n.

Теперь, зная Z_n, получим для U_n рекуррентную формулу первого порядка:

$U_{n+1} = x_n \cdot U_n + Z_n$, а значит, можем определить и U_n.

Итак, нам осталось показать, что существует формула для определения x_n:

$x_n = a_n + \dfrac{b_n}{x_{n-1}}$. Полагая для определенности, что $x_1 = b_2$, получим решение x_n в виде цепной дроби:

$$x_n = a_n + \cfrac{b_n}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-2} + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-2} + \ldots + a_2 + 1}}} .$$

Заметим, что если существует c такое, что $b_n = c^2 - a_n \cdot c$, то можно полагать, что $x_n = 0$. В случае, когда $x_n = 0$, можно привести те же рассуждения, которые мы рассмотрели в начале статьи. Таким образом, мы доказали существование этой формулы.

Замечание. Приведенный выше метод сведения формул второго порядка к первому порядку часто используется при решении дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка. Мы использовали его здесь с некоторым видоизменением. Поэтому для интереса покажем, что подобным методом можно понизить порядок общего линейного дифференциального уравнения второго порядка. Чтобы не загромождать вычисление, сначала приведем его к следующему виду:

$$y'' + p(x) \cdot y = q(x),$$

имеем $y'' + z \cdot y' = z \cdot \left(y' - \dfrac{p(x)}{z} \right) \cdot y + q(x)$.

Обозначим $y' - \dfrac{p(x)}{z} \cdot y = U$;

$$y'' = U' + \left(\frac{p(x)}{z} \right)' \cdot y + \frac{p(x)}{z} \cdot y';$$

$$y'' + z \cdot y' = U' + \left(\frac{p(x)}{z} \right)' \cdot y + \left(\frac{p(x) + z^2}{z} \right) \cdot y' .$$

Заменим в этом равенстве y':

$$y'' = U' + \left(\frac{p(x)}{z} \right)' \cdot y + U \left(\frac{p(x) + z^2}{z} \right) + \left(\frac{p(x) + z^2}{z} \right) \cdot \frac{p(x)}{z} y \cdot$$

Выберем теперь z так, чтобы коэффициент при y равнялся нулю, то есть:

$\left(\dfrac{p(x)}{z} \right)' + \dfrac{(p(x) + z^2)}{z^2} \cdot p(x) = 0$, отсюда

$z' \cdot p(x) - p'(x) \cdot z = p(x) \cdot (z^2 + p(x))$, а для U получаем уравнение:

$$U' + \frac{U \cdot p(x)}{z} = f(x).$$

Заметим, что для z мы получили нелинейное уравнение, которое не удастся решить в явном виде. Поэтому, в отличие от предыдущего, такое преобразование имеет только теоретический интерес.

Более сложно теория выглядит для формулы третьего порядка:

$$U_{n+2} = a_n \cdot U_{n+1} + b_n \cdot U_n + C_n \cdot U_{n-1} + d_n .$$

Можно опять свести (в случае $a_n \neq 0$) к случаю $a_n = 1$. Здесь можно использовать несколько способов понижения порядка. Рассмотрим, например, разность:

$$U_{n+2} - x_n \cdot U_{n+1} - y_n \cdot U_n = (a_n - x_n) \cdot \left(U_{n+1} + \frac{b_n - y_n}{a_n - x_n} \cdot U_n + \frac{C_n}{a_n - x_n} \cdot U_{n-1} \right) + d_n .$$

Чтобы свести к формуле первого порядка, необходимо решить следующие два равенства:

$\frac{b_n - y_n}{a_n - x_n} = -x_{n-1}$ и $\frac{C_n}{a_n - x_n} = -y_{n-1}$, то есть систему уравнений: $\begin{cases} \frac{b_n - y_n}{a_n - x_n} = -x_{n-1} \\ \frac{C_n}{a_n - x_n} = -y_{n-1} \end{cases}$.

Заметим, что если существуют постоянные C_1, C_2 такие, что

$b_n = C_2 + C_1^2 - a_n \cdot C_1$; $C_n = C_2 \cdot (C_1 - a_n)$,

то можно взять $x_n = C_1$, $y_n = C_2$, и они не зависят от n.

Для сведения к рекуррентной формуле второго порядка следует разрешить равенство $x_n = a_n + b_n / x_{n-1} + C_n / x_{n-1} \cdot x_{n-1}$ относительно x_n. При этом, если найти число C такое, что $C_n = (C - a_n) \cdot C^2 - b_n \cdot C$, то можно считать $x_n = C$ и заменой $y_n = U_{n+1} - C \cdot U_n$ свести его уже к формуле второго порядка. Заметим, что если мы вначале введем это равенство к случаю $a_n = 1$, то для $C_n = C^2 \cdot (C - 1) \cdot a_n \cdot a_{n-1} a_{n+1} - b_n \cdot a_{n-2} \cdot C$.

Аналогично можно получить формулу для решения рекуррентного равенства третьего порядка.

+ + +