

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

УДК 517.946

Г.А. Павлов

## О РАЗРЕШИМОСТИ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

### Введение

К обратным задачам теории потенциала относятся две основные задачи: задача определения области и плотности (задача 1 и задача 2). Самой сложной является задача 1. Суть ее состоит в том (см. постановку далее), что в окрестности бесконечности задана гармоническая функция, имеющая такое же поведение, что и потенциал (объемный или простого слоя). Требуется определить область (множество), чтобы потенциал ее заданной меры (плотности) был бы равен исходной функции. Для данной задачи в «основном» различными авторами (например, [1-2]) была рассмотрена задача «в малом», т.е. при дополнительных предположениях, одно из которых состоит в том, что гармоническая функция «близка» к заданному потенциалу. Эта задача изучена полностью. Доказана единственность решения этой задачи. Для бигармонического потенциала оказалось, что задача может и не иметь решения. В общем случае задача частично рассмотрена в [4], а подробно – в работе [3]. В работе [3] эта задача решена в классе односвязных областей для объемного потенциала, а для потенциала простого слоя – и в случае многосвязных областей. В этой статье мы коснемся результатов, полученных в работе [3], а также ряд других результатов. Данные результаты справедливы и для полигармонических потенциалов.

### Теоретическая часть

1. Обозначим  $U(x; \mu, T) = \int_{\bar{T}} \Omega(x, y) d\mu(y), x \in \bar{T}$

внешний объемный потенциал  $T$ , такое же обозначение сохраним и для потенциала, мера которого имеет плотность в смысле меры Лебега, будем также обозначать через  $\mu$ , где

$$\Omega(x, y) = \ln|x - y|, y \in R^2$$

$$\Omega(x, y) = |x - y|^{2-m}, m \geq 3, x, y \in R^m.$$

$$V(x; \mu, \partial T) = \int_{\partial T} \Omega(x, y) \mu(y) ds(y), x \in \bar{T}$$

потенциал простого слоя,  $\partial T$  – граница множества  $T$ .

Дадим вначале постановку задачи 1 в случае объемного потенциала (для потенциала простого слоя оно ничем не отличается). Пусть  $h(x)$  – гармоническая функция, заданная в окрестности бесконечности, и  $h(x) |x|^{m-2} \rightarrow M; m \geq 3$ , и  $h(x) - M \ln|x| \rightarrow 0; m = 2$  (эту функцию в дальнейшем будем называть допустимой). Пусть  $T_0$  – заданная область,  $T_0 \in C^{1,2}$ .

Постановка задачи. Пусть  $h$  – допустимая гармоническая функция, заданная вне  $T_0$ . Требуется определить измеримое множество  $T, \bar{T} \supset T_0$  такое, что

$$h(x) = U(x, \mu, T), x \in \bar{T},$$

где  $\mu$  – мера определения в  $R^m$ .

**Замечание.** Во многих постановках данной задачи требуется, чтобы  $T$  была односвязная жорданова область, причем область  $T_0$  не задается. В работе [3] показано, что в таком варианте задача, как правило, не имеет решения, причем решение задачи существенно зависит от глубины «аналитического» продолжения функции  $h$ .

При постановке задачи можно рассмотреть такие случаи, когда мера определения только в области  $D \subset R^n$ ; в этом случае мы будем писать  $T, \bar{T} \subset D$ .

Приведем вначале результат, полученный в [3]. Пусть  $R(T) = \{x \in \partial T : \text{в окрестности точки } x \partial T \text{ не является аналитической поверхностью}\}$ ; в случае  $p \geq 2, R^{p,\lambda}(T) = \{x \in \partial T : \text{в окрестности точки } x, \partial T \notin C^{0,\lambda}\}$ ;  
 $R^1(T) = \bigcup_{p \geq 2} R^{p,\lambda}$ .

Сформулируем для объемного потенциала результат в виде теоремы.

**Теорема 1.** Если область  $T$  односвязная, то решения задачи для положительных мер, вообще говоря, не существует, при этом если  $\mu \in L_{1,loc}$ , то множество функций, для которых не существует решения в классе односвязных жордановых областей  $T$ , плотно во множестве тех функций, для которых решения задачи существует.

Приведем пример функций, для которых в  $T$  решения задачи не существует [см. 3]. Пусть  $\Omega = \{T \in R^n / R(T) = \partial T\}$ ,  $T$  – односвязная жорданова область,  $f(x)$  – аналитическая функция, такая, что  $\int_T f(x) dx < \mu(T), T \in \Omega$ . Тогда для

$h(x) = U(x; f; T), x \notin \bar{T}$  решения задачи не существует.

Используя данный класс гармонических функций, можно доказать, что этот класс функций плотен для тех функций, для которых решение задачи существует.

В случае  $\mu(x) \geq a, a > 0$  данный результат верен и для многосвязных областей для потенциала простого слоя, если

$h(x) = aV(x; 1; T), x \notin \bar{T}, T \in \Omega, (1)$   
 где  $T$  – выпуклая область.

Правда, в этом случае множество таких функций уже не будет плотным во множестве функций, для которых существует решение задачи.

Приведем класс многосвязных областей (множеств), для которых можно построить гармонические функции, для которых не существует решения задачи. Обозначим

$$\Lambda_c = \{T; \mu(T) \geq c l(d(T))\}, (2)$$

где  $l(dT)$  – площадь (длина  $dT$ ) и  $h$  удовлетворяет (1) при  $a < 0, T \in \Omega$ .

Тогда в  $\Lambda_c$  решение задачи для  $h$  не существует.

Рассмотрим семейство функций  $h(x) = aV(x; 1; T), x \notin \bar{T},$  где  $a \leq c, T$  – выпуклая область,  $\partial T = R(T)$ . Тогда в  $\Lambda_c$  для функции  $h(x)$  не существует решения задачи.

Заметим, что  $\cup \Lambda_c$  плотно во множестве всех односвязных измеримых множеств. С другой стороны, пересечение класса данных функций  $h(x)$  есть пустое множество и поэтому остается открытым вопрос о существовании решения обратной задачи в классе многосвязных множеств.

Если мы избавимся от условия  $\mu \geq a$  для потенциала простого слоя, то решение в  $\Lambda_c$  может существовать для  $\mu \geq 0$ , если мы попробуем выполнения условия на  $\mu(\partial T) \geq c l(\partial T)$ .

2. В работе [3], используя теоремы в «малом», доказано, что существует последовательность областей  $T_i (T_0$  – заданная заранее область), что и для  $h$ , и для произвольной допустимой аналитической функции  $\mu$  верно равенство

$$h(x) = U(x; \mu, T^0 \cup T_i), x \notin T^0 \cup T_i, (2)$$

где  $T_i$  – регулярная аналитическая поверхность,  $\mu_i > 0$  если  $T^0 \subset T_i$  (и даже  $\mu_i \geq \mu$ , что, по-видимому, указывает, что плотность  $\mu$  была взята «малой»), причем

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \mu(x), x \in T^0 \cap T_i \\ \mu(x)/t, x \in T_i / \bar{T}^0 \\ (t-1)\mu(x)/t, x \in T^0 / \bar{T}_i \end{cases}.$$

**Следствие.** Для любой допустимой функции существуют последовательно-

сти областей  $T_i$  и кусочно-постоянные функции  $\mu_i$ , что

$$h(x) = U(x; \mu_i, T^0 \cup T_i), \quad x \notin T_i.$$

При этом  $\mu_i$  можно взять следующими:

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & x \in T^0 \cap T_i, \\ \frac{1}{t}, & x \in T_i \setminus T^0, \\ \frac{t-1}{t}, & x \in T^0 \setminus T_i \end{cases}.$$

Из равенства (2) и теоремы сделаем следующие выводы. Пусть для  $h$   $\mu$  не существует решения задачи. Какие видоизменения задачи можно сделать, чтобы решение задачи существовало? Для произвольной области  $T$  зададим класс плотностей  $\mu_i$  для заданной области  $T^0$ , где  $t$  – некоторые числа. Поставим задачу определения области  $T_i$  по значению  $h$ . Тогда существует значение  $a > 0$ , что при  $t \in (0, a)$  решение задачи существует и единственно, т.е. для  $h$  справедливо равенство (2), и тем самым мы решили задачу в другой постановке. Кроме того, мы установили, какое преобразование можно осуществить над функцией  $\mu$ , чтобы решение задачи существовало.

Рассмотрим другой подход к решению задачи. Пусть  $\mu > 0$  – аналитическая функция,  $h(x) = M\Omega(x, 0) + g(x)$ ,

$$|x|^{m-2} g(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Покажем, что найдутся области  $T_1, T_2$  и число  $c > c^0$ , что

$$h(x) = c(U(x; \mu, T_1) - (U(x; \mu, T_2))), \quad x \notin T_1 \cup T_2. \quad (3)$$

Действительно, пусть  $T_2$  – такая область, что  $h(x), U(x; \mu, T_2)$ , аналитически продолжаются до области  $T_0, T_0 \subset T_2$  (в качестве  $T_2$  можно взять шар (круг)). Рассмотрим  $h_1(x) = h(x)/c + U(x; \mu, T_2), x \notin T_2$ . Выберем  $c$  так, что для  $h_1(x)$  выполняются условия теоремы существования в «малом», то есть  $h_1(x) = U(x; \mu; T_1), x \notin T_1 \cup T_2$ . Из этого соотношения получаем равенство (3) для  $h(x)$ .

В равенстве (3) выделяется случай  $T_2 \subset T_1$ , при котором  $h(x)$  представляется в виде потенциала двухсвязной области. Вообще говоря, это не так. Если мы берем  $T_2$  так, что на  $\partial T_2 \partial \mu / \partial n +$

$+ K \mu \geq 0$ , то такое же представление верно и для потенциала простого слоя.

Рассмотрим ряд частных случаев. Пусть существуют число  $c$  и односвязная область  $T$ , что

$$U(x; \mu, T) = c\Omega(x, 0), \quad x \notin T. \quad (5)$$

Если  $T$  – круг (кольцо), то  $\mu(x) = K + Я(x)$  ( $K = const$ ),  $Я(x)$  создает нулевой потенциал, при этом если  $T_1$  (3), то для выполнения (5) достаточно, чтобы  $\mu(x)/K$  было близко к единице.

Из теоремы существования задачи в «малом» следует, что тогда существуют области  $T$  и для значений  $c$ , расположенных в интервале, содержащем данное значение. Покажем, что найдется число  $M_0$ , что при  $M > M_0$   $h(x)$  можно представить в виде внешнего потенциала односвязной области  $T_1$ . Рассмотрим то значение  $c$ , при котором существует такая область, что выполнено (5). Пусть функция  $h_1(x) = cg(x)/M + c\Omega(x, 0)$ , где  $g(x)$  аналитически продолжается через область  $T$ . Существует число  $K$ , что при  $M > Kc$  функция  $h_1(x)$  удовлетворяет теореме существования в «малом» и отсюда  $h(x) = M/c U(x; \mu; T_1), x \notin T_1$ .

В случае  $\mu = 1$  можно уточнить равенство (3), а именно: можно доказать справедливость равенства  $h(x) = U(x; \mu_1, T_1), x \notin T_1$ , где  $\mu_1 = c_1, x \in T_1 / T_2, \mu_1 = c_2, x \in T_2$ ,  $T_2$  некоторый шар (круг),  $T_2 \subset T_1, c_1$  определяется, как в начале пункта.  $T_2$  – произвольный шар, и следовательно,  $c_2$  определяется в зависимости и от  $T_1$ . Такое же представление справедливо и для потенциала простого слоя, то есть любая гармоническая функция представлена в виде потенциала двухсвязной области, причем внутренняя компонента ограничивает некоторый шар (круг) и плотность потенциала (постоянна на каждом компоненте).

Обратим внимание на то, что если  $g(x)$  продолжается аналитически через границу шара (круга) массы  $M$  (в случае потенциала простого слоя (массы  $M$  сферы (окружности), то для  $h(x, a) = M\Omega(x, 0) + ag(x)$  найдется такое значение  $a_0$ , что при  $|a| \leq a_0$  существует решение обратной задачи для единичной плотности.

### Выводы

Данные рассуждения приводят к ряду проблем, требующих дополнительного изучения. Отметим, что при решении задач прослеживается связь решения с глубиной аналитического продолжения функции  $g(x)$ . Заметим, что если (5) выполнено для многосвязной области  $T$ , то предыдущие результаты сохраняются и в данном случае.

Если для  $\mu$  выполнено (3), то важную роль играет следующее неравенство:  $|g(x)/M| \geq \alpha$ . При этом решение задачи существует при достаточно больших  $\alpha$  для функции  $h$ . В свою очередь  $\alpha$  зависит от глубины аналитического продолжения функции  $g(x)$ .

### Библиографический список

1. Исаков В.М. О разрешимости обратной задачи теории потенциалов / В.М. Исаков // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 2. С. 66-74.
2. Павлов Г.А. Разрешимость обратных задач теории потенциала / Г.А. Павлов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 10. С. 1772-1779.
3. Павлов Г.А. О существовании и единственности решения внешних обратных задач теории потенциала / Г.А. Павлов // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4.
4. Чередниченко В.Г. Оценки потенциалов масс и разрешимость обратной задачи / В.Г. Чередниченко // ДАН СССР. 1990. Т. 313. № 4. С. 820-824.

