



УДК 629.332

**А.С. Павлюк,  
В.И. Поддубный,  
А.И. Валекжанин**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ШАРНИРНО-СОЕДИНЕННОЙ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ В МАТЛАБ-СИМУЛИНК**

Эксплуатационные показатели колесных машин в значительной степени зависят от устойчивости их движения и управляемости. Существенное влияние на устойчивость и управляемость оказывают массо-геометрические характеристики и эксплуатационные параметры отдельных звеньев колесной машины. Математическое моделирование различных движений позволяет определить их рациональные с точки зрения устойчивости и управляемости движения значения. Разработанная авторами математическая модель позволяет моделировать различные маневры шарнирно-соединенной колесной машины и определять выходные кинематические параметры звеньев машины (линейные и угловые скорости и координаты) для последующего анализа устойчивости движения и управляемости.

Расчетная схема модели изображена на рисунке 1. Машина состоит из трехосного тягача и двухосного полуприцепа. Рассматривается движение относительно неподвижной системы отсчета  $XOY$ . С центрами масс тягача и полуприцепа связаны подвижные системы отсчета  $X_1O_1Y_1$  и  $X_2O_2Y_2$ . На схеме приняты следующие обозначения:

$K_{1T}, K_T, K_P$  – ширина колеи оси тягача и полуприцепа;

$a_{ij}$  – расстояния от центра масс тягача до его осей;

$a$  – расстояние от центра масс тягача до точки соединения тягача и полуприцепа;

$b, b_{24}, b_{25}$  – расстояния от точки соединения тягача и полуприцепа до его центра масс, передней и задней осей;

$T_{ij}$  – боковые силы в контакте колес с опорной поверхностью;

$S_{ij}$  – силы сопротивления качению ведомых колес;

$F_{ij}$  – движущие силы ведущих колес тягача;

$V_{ij}$  – скорости центров масс колес;

$\delta_{ij}$  – деформационные составляющие углов увода;

$\alpha$  – угол поворота управляемых колес тягача;

$P_{XT}, P_{YT}, P_{XP}, P_{YP}$  – проекции главного вектора возмущающих сил со стороны опорной поверхности для тягача и полуприцепа;

$M_P$  – момент тормозного устройства полуприцепа;

$\Phi_1, \Phi_2$  – углы поворота продольных осей тягача и полуприцепа относительно продольной оси  $X$ .

Представленная на рисунке 1 шарнирно-соединенная мобильная машина имеет

четыре степени свободы. Для исследования движения были составлены дифференциальные уравнения с применением уравнений Лагранжа 2-го рода (1). Обобщенными координатами являются

координаты  $x$  и  $y$  центра масс тягача, а также угловые отклонения продольных осей тягача  $\varphi_1$  и полуприцепа  $\varphi_2$  относительно оси  $x$ .

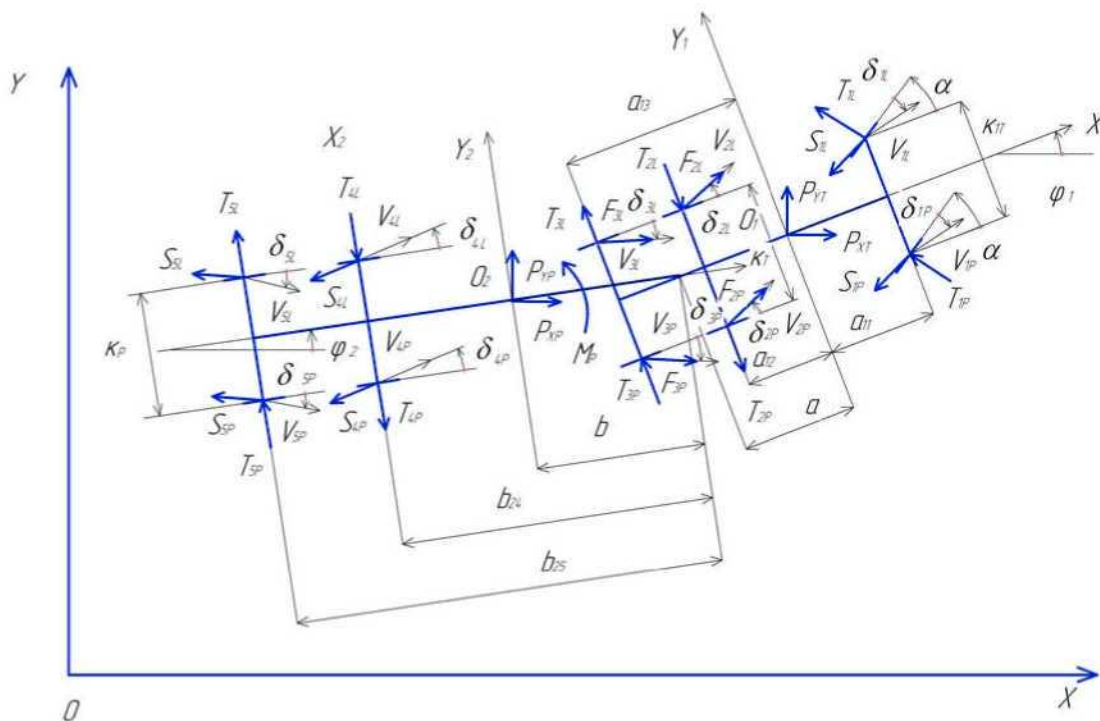


Рис. 1. Расчетная схема модели шарнирно-соединенной мобильной машины

$$\begin{cases} \frac{d}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = Q_x, & \frac{d}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = Q_y, \\ \frac{d}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} \right) = Q_{\varphi_1}, & \frac{d}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} \right) = Q_{\varphi_2}. \end{cases} \quad (1)$$

Кинетическая энергия мобильной машины, звенья которой совершают плоское движение, определяется выражением

$$T = \frac{m_T V_T^2}{2} + \frac{J_{zT} \omega_1^2}{2} + \frac{m_P V_P^2}{2} + \frac{J_{zP} \omega_2^2}{2}, \quad (2)$$

где  $T$  – кинетическая энергия мобильной машины;

$m_T$  и  $m_P$  – масса тягача и полуприцепа;

$V_T$  и  $V_P$  – скорость центра масс тягача и полуприцепа;

$\omega_1$  и  $\omega_2$  – угловая скорость тягача и полуприцепа;

$J_{zT}$  и  $J_{zP}$  – момент инерции тягача и полуприцепа относительно вертикальных осей  $z$ , проходящих через центры масс тягача и полуприцепа.

Скорости центра масс тягача и прицепного звена относительно неподвижной системы координат  $хоу$  равны

$$\begin{aligned} V_T^2 &= V_x^2 + V_y^2, \quad V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_{Px} = \dot{x} + \omega_1 a \sin \varphi_1 + \omega_2 b \sin \varphi_2, \\ V_{Py} &= \dot{y} - \omega_1 a \cos \varphi_1 - \omega_2 b \cos \varphi_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a$  – расстояние от центра масс тягача до шкворня прицепного звена;

$b$  – расстояние от центра масс полуприцепа до шкворня.

Скорость центра масс полуприцепа зависит от  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , следовательно, кинетическая энергия системы является функцией обобщенных координат и скоростей. С учетом (3) выражение кинетической энергии (2) будет иметь вид

$$T = \frac{m_T(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J_{zT}\dot{\phi}_1^2 + m_P[\dot{x} + \dot{\phi}_1 a \sin(\varphi_1) + \dot{\phi}_2 b \cos(\varphi_2)]^2 + J_{zP}\dot{\phi}_2^2}{2} + \frac{m_P[\dot{y} - \dot{\phi}_1 a \cos(\varphi_1) - \dot{\phi}_2 b \cos(\varphi_2)]^2}{2}.$$

Частные производные кинетической энергии по обобщенным скоростям равны

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_T \dot{y} + m_P \dot{y} - m_P a \dot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - m_P b \dot{\phi}_2 \cos \varphi_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_T \dot{x} + m_P \dot{x} + m_P a \dot{\phi}_1 \sin \varphi_1 + m_P b \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} = J_{zP} \dot{\phi}_1 + m_P a \dot{x} \sin \varphi_1 + m_P a^2 \dot{\phi}_1 + m_P a b \dot{\phi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_P a \dot{y} \cos \varphi_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} = m_P b \dot{x} \sin \varphi_2 + m_P a b \dot{\phi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m_P b^2 \dot{\phi}_2 - m_P b \dot{y} \cos \varphi_2 + J_{zP} \dot{\phi}_2. \quad (7)$$

Производные по времени выражений (4) – (7) равны

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x}(m_T + m_P) + a m_P \ddot{\phi}_1 \sin \varphi_1 + b m_P \ddot{\phi}_2 \sin \varphi_2 + a m_P \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 + b m_P \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \ddot{y}(m_T - m_P) - a m_P \ddot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - b m_P \ddot{\phi}_2 \cos \varphi_2 + a m_P \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1 + b m_P \dot{\phi}_2^2 \sin \varphi_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = a m_P \ddot{x} \sin \varphi_1 - a m_P \ddot{y} \cos \varphi_1 + \ddot{\phi}_1 (J_{zT} + a^2 m_P) + a b m_P \ddot{\phi}_2 * \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + a m_P \dot{x} \dot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - a b m_P \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a m_P \dot{y} \dot{\phi}_1 \sin \varphi_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) = b m_P \ddot{x} \sin \varphi_2 - b m_P \ddot{y} \cos \varphi_2 + a b m_P \ddot{\phi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \ddot{\phi}_2 (J_{zP} + b^2 m_P) + b m_P \dot{x} \dot{\phi}_2 \cos \varphi_2 - a b m_P \dot{\phi}_1 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + b m_P \dot{y} \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2.$$

Частные производные кинетической энергии по обобщенным координатам равны

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_1} = m_P a \dot{\phi}_1 [\dot{x} \cos \varphi_1 - \dot{\phi}_2 b \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{y} \sin \varphi_1], \quad \frac{\partial T}{\partial \phi_2} = m_P b \dot{\phi}_2 [\dot{x} \cos \varphi_2 + \dot{\phi}_1 a \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{y} \sin \varphi_2].$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (m_T + m_P), & c_{12} &= 0, & c_{13} &= a m_P \sin \varphi_1, & c_{14} &= b m_P \sin \varphi_2, \\ c_{21} &= 0, & c_{22} &= (m_T - m_P), & c_{23} &= -a m_P \cos \varphi_1, & c_{24} &= -b m_P \cos \varphi_2, \\ c_{31} &= a m_P \sin \varphi_1, & c_{32} &= a m_P \cos \varphi_1, & c_{33} &= (J_{zT} + a^2 m_P), \\ c_{34} &= a b m_P \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ c_{41} &= b m_P \sin \varphi_2, & c_{42} &= -b m_P \cos \varphi_2, & c_{43} &= -a b m_P \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ c_{44} &= (J_{zP} + b^2 m_P) \end{aligned}$$

Обобщенные силы определялись по стандартной методике как коэффициенты при обобщенных возможных перемещениях в выражении элементарных работ на этих перемещениях. Ввиду громоздкости в данной статье они не приводятся.

С учетом преобразований уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{cases} c_{11}\ddot{x} + c_{12}\ddot{y} + c_{13}\ddot{\varphi}_1 + c_{14}\ddot{\varphi}_2 = Q_x \\ c_{21}\ddot{x} + c_{22}\ddot{y} + c_{23}\ddot{\varphi}_1 + c_{24}\ddot{\varphi}_2 = Q_y \\ c_{31}\ddot{x} + c_{32}\ddot{y} + c_{33}\ddot{\varphi}_1 + c_{34}\ddot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_1} \\ c_{41}\ddot{x} + c_{42}\ddot{y} + c_{43}\ddot{\varphi}_1 + c_{44}\ddot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_2} \end{cases} \quad (8)$$

Коэффициенты при вторых производных и обобщенные силы являются функциями массово-геометрических, эксплуатационных параметров машины, обобщенных координат и обобщенных скоростей. Уравнения движения мобильной машины представляют собой систему четырех неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для интегрирования системы (8) и симуляции различных маневров была разработана модель в Матлаб-Симулинк [1]. Топологическое отображение модели представлено на рисунке 2. Характеристики шин и

массово-геометрические характеристики звеньев мобильной машины были определены на основании экспериментальных исследований, проведенных в АлтГТУ [2, 3].

В подсистеме Natschalnye uslowija задаются начальные значения обобщенных координат и скоростей мобильной машины. Блок Parametry modeli определяет массово-геометрические и эксплуатационные параметры ее отдельных звеньев. Подсистема Manewry обеспечивает различные маневры машины (переставка, движение по кругу, движение передним и задним ходом). Основное назначение Reguljator skorosti\_dwigenija – изменение движущей силы на ведущих колесах для поддержания задаваемой скорости движения. Определение коэффициентов системы дифференциальных уравнений (8) и вторых производных обобщенных координат происходит в Reshenie sistemDU. Блок Integratory проводит двойное интегрирование вторых производных и определяет текущие значения обобщенных скоростей и координат. Oszillografy обеспечивает визуализацию полученных данных и их запись в память Матлаб для последующей обработки.

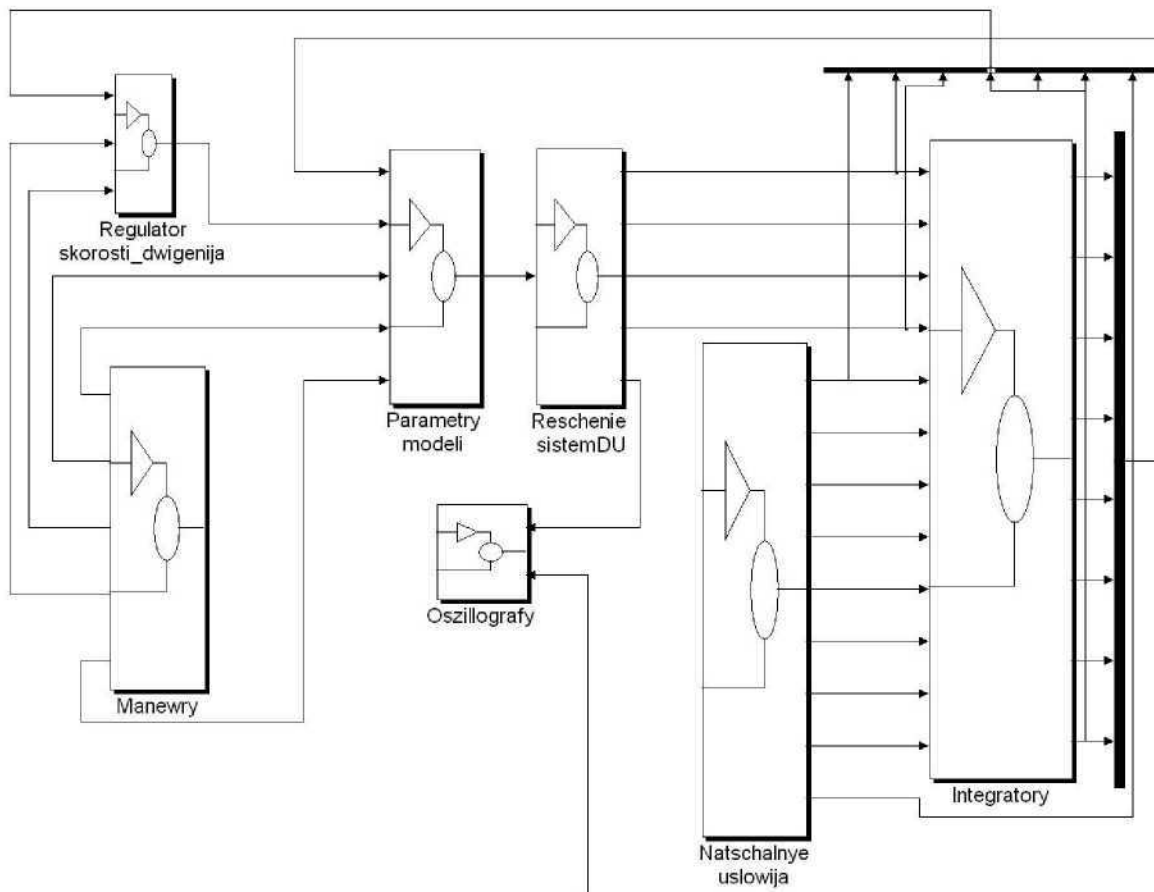


Рис. 2. Модель колесной мобильной машины в Матлаб-Симулинк

Для проверки адекватности модели реальному объекту было проведено моделирование движения мобильной машины при маневре «переставка». Закон изменения угла поворота управляемых колес тягача при маневре изображен на рисунке 3. Скорость движения тягача – 5 м/сек. Полученные законы изменения боковых координат тягача (рис. 4) соответствуют истинной картине при выполнении маневра, что свидетельствует об адекватности модели реальному объекту.

На рисунке 5 изображены результаты моделирования движения задним ходом по опорной поверхности с коэффициентом

сцепления 0,2. Моделировалось движение с устройством для предотвращения складывания полуприцепа и без него. Устройство создает внутренний тормозной момент между тягачом и полуприцепом, возникающий при относительном угловом перемещении их продольных осей. Из рисунка 5 следует, что применение тормозного устройства дает значительное уменьшение угла складывания, что вызывает улучшение маневренности и безопасности движения. Качественные результаты моделирования совпадают с результатами экспериментальных исследований, проведенных в АлтГТУ.

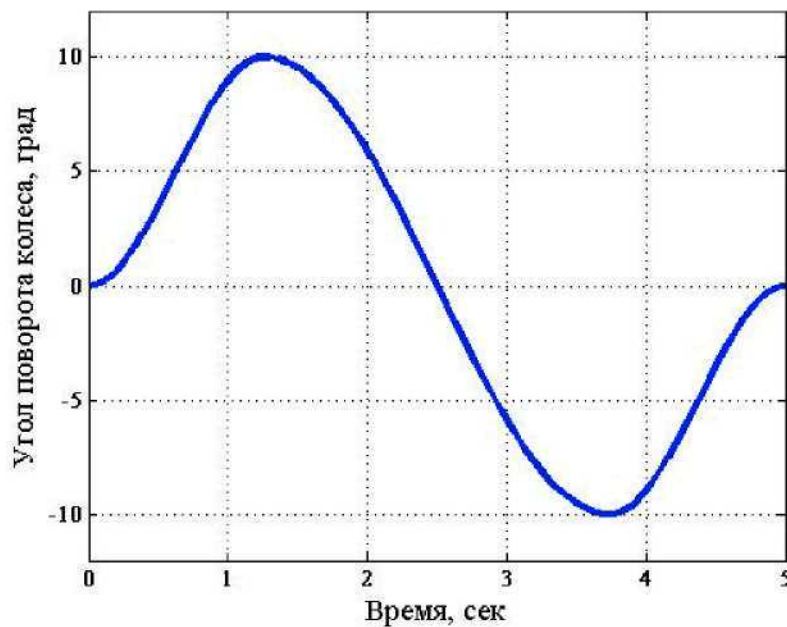


Рис. 3. Закон изменения угла поворота управляемых колес при переставке

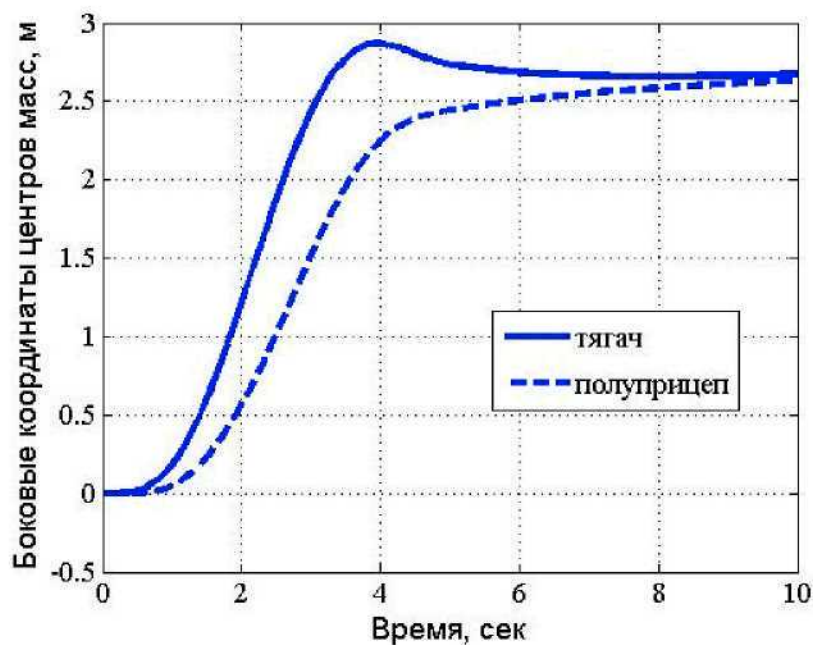


Рис. 4. Боковые координаты тягача и полуприцепа при переставке

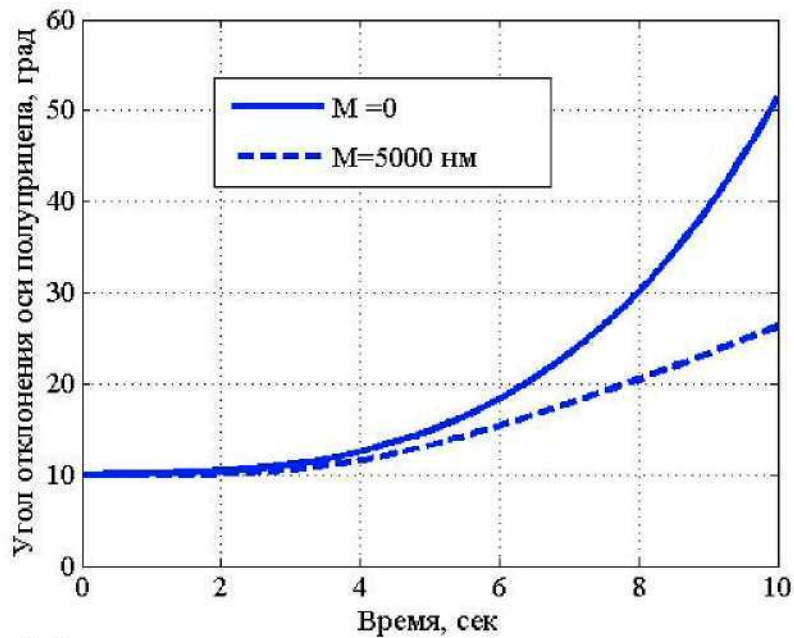


Рис. 5. Угловое отклонение полуприцепа при движении задним ходом:  
 $M$  – момент, создаваемый тормозным устройством полуприцепа

**Библиографический список**

1. Черных И.В. SIMULINK: среда создания инженерных приложений / И.В. Черных; под общ. ред. В.Г. Потемкина. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. 496 с.  
 2. Валекжанин А.И. Характеристики увода пневматических шин / А.И. Валекжанин, А.С. Павлюк, В.И. Поддубный.

Деп. В ЦНИИТЭИавтопроме, 1989. № 1821.

3. Валекжанин А.И. Экспериментальное определение массово-геометрических характеристик звеньев автопоездов / А.И. Валекжанин, А.С. Павлюк. Деп. в ЦНИИТЭИтракторсельхозмаше, 1986. № 1320-ап.

