



УДК [550.46+556.51]:004.94

Ю.Б. Кирста  
Yu.B. Kirsta

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОХИМИЧЕСКОГО СТОКА ГОРНЫХ РЕК:  
2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА МОДЕЛИ СТОКА ФОСФАТОВ**

**MODELING OF HYDROCHEMICAL COMPOSITION  
OF MOUNTAIN RIVER RUNOFF:  
2. ASSESSMENT OF MODEL PERFORMANCE FOR PHOSPHATE RUNOFF**

**Ключевые слова:** гидрохимический сток, математическая модель, фосфаты, качество модели, чувствительность, дисперсия невязки, Алтай, Саяны.

Оценено качество универсальной математической модели стока фосфатов ( $PO_4^{3-}$ ) для рек Алтае-Саянской горной страны. Определена чувствительность модели к естественным/природным вариациям ее входных факторов. Чувствительность выражена как вклад конкретного фактора в дисперсию наблюдаемых значений выходной переменной модели (гидрохимического стока). Получено ее последовательное уменьшение в ряде: водные стоки с отдельных ландшафтов, определяемые ландшафтной структурой речных бассейнов (52%), площадь пашни (13%), поперечный уклон бассейнов (10%), осадки (7,5%). На основе найденных значений чувствительности осуществлен полный компонентный анализ дисперсии разностей (невязки) между рассчитанными по модели и наблюдаемыми значениями гидрохимического стока. В результате установлены вклады в эту дисперсию от погрешности определения поперечного уклона речных бассейнов (8%) и площадей пашни (0,1%), погрешности самих уравнений модели (3%) и погрешности наблюдений за концентрацией фосфатов в речном стоке (2%). Данный анализ позволяет более объективно охарактеризовать качество математических моделей по сравнению с такими традиционными критериями их эффективности как RSR и Нэша-Сатклиффа  $NSE=1-RSR^2$ , так как в RSR и NSE невозможно отделить собственно погрешность моделей от погрешностей наблюдений за их входными факторами и выходной переменной. Корректно рассчитанный для модели критерий Нэша-Сатклиффа  $NSE=0.97$  означает ее очень хорошее качество. Это позволяет рассчитывать с хорошей точностью сезонную и многолетнюю динамику гидрохимического стока для рек Алтае-Саянской горной страны, а при соответствующей коррекции

значений параметров модели – и для других горных территорий.

**Keywords:** hydrochemical runoff, mathematical model, phosphates, model performance, sensitivity, residual variance, the Altai, the Sayan

The mathematical model performance for phosphates ( $PO_4^{3-}$ ) runoff is estimated by the example of rivers of the Altai-Sayan mountain country. The model sensitivity to natural /environmental variations of input factors is evaluated. The sensitivity is expressed as a contribution of a particular factor to the variance of the observed values of the model output variable (hydrochemical runoff). A consecutive reduction of sensitivity is obtained in the following series of factors: water runoff from individual landscapes determined by landscape structure of river basins (52%), arable land (13%), sloping basins (10%), and precipitation (7.5%). Using the sensitivity foundation, a comprehensive component analysis of variance of difference (residual) between the calculated and the observed values of hydrochemical runoff is carried out. The contribution to the residual variance by the errors of river basin slope (8%), area of arable land (0.1%), model equations themselves (3%), and the observation of phosphates concentration in river runoff (2%) is specified. The analysis allows for objectively characterizing the quality of mathematical models as compared to such traditional criteria of their efficiency as RSR and Nash-Sutcliffe  $NSE=1-RSR^2$  since in RSR and NSE it is impossible to separate the model errors from observation errors of input factors and output variable. The correctly calculated Nash-Sutcliffe efficiency  $NSE=0.97$  represents a very good performance of the model. This makes it possible to calculate with reasonable accuracy the seasonal and long-term dynamics of hydrochemical runoff for rivers in the Altai-Sayan mountain country as well as in other mountainous areas if updating the model parameters.

**Кирста Юрий Богданович**, д.б.н., проф., гл. н.с. Институт водных и экологических проблем СО РАН, г. Барнаул. Тел.: (3852) 666-457. E-mail: kirsta@iwep.ru.

**Kirsta Yuriy Bogdanovich**, Dr. Bio. Sci., Prof., Chief Staff Scientist, Institute for Water and Environmental Problems, Sib. Branch of Rus. Acad. of Sci., Barnaul. Ph.: (3852) 666-457. E-mail: kirsta@iwep.ru.

**Введение**

При математическом моделировании сложноорганизованных природных систем (гидрологических, гидрохимических, экологических и др.) большое значение придается

оценке чувствительности к вариациям входных факторов и погрешности расчетов по моделям. Обзор различных методов оценки чувствительности можно найти, например, в [1]. Погрешность расчетов тесно связана с

чувствительностью и важна для прикладного использования моделей.

**Задачи** исследования – определить чувствительность и погрешность модели стока фосфатов (анионов  $PO_4^{3-}$ ), разработанной для рек Алтае-Саянской горной страны [2]. Для этого используются простой метод количественной оценки чувствительности моделей к естественным вариациям факторов среды и полный компонентный анализ дисперсии погрешности расчетов [3]. Оба метода дополняют системно-аналитическое моделирование (САМ) [4], с помощью которого была создана указанная модель.

### Объекты и методы

В ходе САМ стока  $PO_4$  использован значительный объем экспериментальных данных: несколько тысяч наблюдений за гидрохимическим стоком по 34 речным бассейнам Алтае-Саянской горной страны за 1951-2003 гг., значения месячных осадков и среднемесячных температур воздуха по территории за этот же период, ландшафтная структура бассейнов, площади и высота расположения ландшафтов (13 групп геосистем), площадь пашни и другие картографические характеристики [2]. При этом площади анализируемых водосборных бассейнов составляли от 177 до 21000 км<sup>2</sup>, что позволяет отнести тестируемую модель к универсальному типу.

Ранее для территории Алтае-Саянской горной страны был осуществлен пространственно-временной анализ ее метеорологических полей [5]. Внутригодовая и многолетняя динамика месячных осадков и среднемесячных температур воздуха оказалась единой по всей стране при нормировке осадков на их среднемноголетнее значение за июль «in situ», а температур – на их среднемноголетнее значение за январь (для X-IV мес.) и июль (для V-IX) «in situ». Такие пространственно обобщенные нормированные характеристики уже не зависели от координат или высоты расположения характеризуемых участков, были одинаковы для всех анализируемых речных бассейнов и поэтому применялись во всех дальнейших расчетах. В совокупности в модели использовалось 636 значений обобщенных по территории Алтае-Саянской горной страны нормированных месячных осадков и 636 среднемесячных температур воздуха за период 1951-2003 гг.

С учетом внутригодовых особенностей речного стока на рассматриваемой территории были выделены 4 гидрологических периода/сезона: первый (зимняя межень, XII-III мес.), второй (весенне-летнее половодье, IV-VI), третий (летняя межень, VII-VIII), четвертый (осенняя межень с возможными паводками при сильных дождях, IX-XI). Наблюдения за гидрохимическим стоком бы-

ли нерегулярны, и поэтому их данные усреднялись по сезону каждого года для каждого речного бассейна. В среднем по всем 34 бассейнам массовые концентрации  $PO_4$  составили для 1-, 2-, 3-, 4-го сезонов, соответственно, 0,019; 0,029; 0,018; 0,017 мг/л.

В связи с тем, что в модели использовались нормированные осадки и температуры воздуха, значения концентраций  $PO_4$  также нормировались на их средние по речным бассейнам сезонные значения. В целом, база данных по гидрохимическому стоку включила 1240 среднесезонных нормированных концентраций  $PO_4$  в разные годы по 34 речным бассейнам, то есть  $1240/4=310$  величин для каждого сезона.

В ходе САМ проверялись различные физико-химически обоснованные варианты описания зависимостей между выходной переменной (гидрохимическим стоком) и факторами среды. Для облегчения поиска формы зависимостей процессов от факторов применялась кусочно-линейная функция  $H$ , состоящая из трех линейных фрагментов:

$$H(X1, X2, Y1, Y2, Z1, Z2, X) = \begin{cases} Y1 + Z1 \cdot (X - X1), & \text{если } X < X1 \\ \frac{Y2 - Y1}{X2 - X1} (X - X1) + Y1, & \text{если } X1 \leq X < X2, \\ Y2 + Z2 \cdot (X - X2), & \text{если } X \geq X2 \end{cases} \quad (1)$$

где  $X1, X2, Y1, Y2, Z1, Z2$  – параметры, определяемые в ходе САМ путем решения обратной задачи;  $X$  – какая-либо переменная модели.

Полученная математическая модель гидрохимического стока дала наименьшую сумму квадратов разностей (**невязку**) между рассчитанными и наблюдаемыми значениями стока фосфатов [2]. В итоге сток оказался зависим от осадков и температур воздуха (влияющих на расчет водного стока [6]), ландшафтной структуры территории, поперечного уклона речных бассейнов и имеющих площадей пашни. Сток фосфатов рассчитывался по уравнениям:

для первого гидрологического сезона

$$\text{сток} = \sum_k a_k Q_k^i H(c_1, c_1, 1, 1, c_2, c_3, P) H(c_4, c_4, 1, 1, c_5, c_6, K^i) + bq^i + dS^i Q^i, \quad (2a)$$

для второго, третьего и четвертого гидрологических сезонов

$$\text{сток} = \sum_k a_k Q_k^i H(c_1, c_1, 1, 1, c_2, c_3, P) H(c_4, c_4, 1, 1, c_5, c_6, K^i) + bq^i + d\sqrt{S^i} Q^i, \quad (26)$$

где  $P$  – обобщенные по территории Алтае-Саянской горной страны нормированные осадки [5] за IX-XI мес. предшествующего года для 1-го сезона или за IV-VI, VII-VIII,

IX-XI мес. для 2-, 3-, 4-го сезонов соответственно;

$a_k$  – параметры, отвечающие постоянной среднесезонной концентрации вещества ( $PO_4$ ) в расчетном водном стоке  $Q_k^i$ , формируемом  $k$ -й группой геосистем за счет осадков  $P$ ,  $k=1\div 13$ ;  $b$  – параметр, сопоставляемый с постоянной среднесезонной концентрацией вещества в расчетном приходящем (или уходящем) среднесезонном подземном водном стоке  $q^i$ , который формируется в бассейне  $i$  почвенно-грунтовыми водами и водами зон трещиноватых пород;

$K^i$  – средний поперечный уклон бассейна  $i$ , рассчитываемый по картографическим данным как тангенс угла наклона склонов относительно горизонтали [2];

$H$  – кусочно-линейная функция (1);

$c_{1чб}$  – параметры, отражающие влияние на гидрохимический сток осадков  $P$  и уклона  $K^i$ ;

$d$  – параметр, характеризующий добавку к концентрации вещества от каждого процента площади  $S^i$  в расчетном водном стоке  $Q^i$ ;

$S^i$  – относительная площадь пахотных земель (в процентах от площади бассейна  $i$ ).

Модели пространственного обобщения и нормировки среднемесячных температур и месячных осадков [2], водного стока [6] и стока  $PO_4$  (2) вместе составляют полную имитационную модель климата, водного и гидрохимического стоков. Все параметры модели стока фосфатов (2) определены в ходе САМ через решение обратной задачи по ежегодно наблюдаемым среднесезонным стокам  $PO_4$ , найденным как  $Q^i C^i$ . Величина  $Q^i$  характеризует среднесезонный водный сток для замыкающего створа бассейна с номером  $i=1-34$  в текущем году, рассчитывается по модели водного стока и нормируется на свое среднемноголетнее наблюдаемое значение в конкретном бассейне  $i$  [6].  $C^i$  представляет собой наблюдаемые концентрации вещества в речном стоке, нормированные на их среднее значение для 34 бассейнов в конкретном сезоне.

Оценка чувствительности модели стока фосфатов основывается на универсальном критерии, характеризующем степень адекватности расчетных методов и моделей [3, 5]:

$$A = S_{разн} / \sqrt{2} S_{набл.} \quad (3)$$

где  $A$  – критерий адекватности;

$S_{разн}$  – стандартное (среднеквадратичное) отклонение для разности сравниваемых рас-

четного и наблюдаемого рядов моделируемой характеристики;

$S_{набл}$  – стандартное отклонение для наблюдаемого ряда;

$1/\sqrt{2}$  – множитель.

Согласно (3) критерий  $A$  представляет собой погрешность модели, нормированную на стандартное отклонение данных наблюдений. Интервал значений  $A = 0-0,71$  характеризует различную степень адекватности/идентичности расчетных и наблюдаемых значений переменной с их наилучшим совпадением при  $A=0$ . Критерий  $A$  подобен показателю качества моделей RSR [7, 8] и критерию Нэша-Сатклиффа NSE [8], с которыми связаны зависимостями  $RSR=A\sqrt{2}$ ,  $NSE = 1-RSR^2 = 1-2A^2$ .

Чувствительность  $FS$  рассчитывается на основе  $A$  по следующей формуле [3]:

$$FS = (A')^2 - (A)^2 = \frac{(S'_{разн})^2 - (S_{разн})^2}{2(S_{набл})^2} = \frac{2(S_{факт})^2}{2(S_{набл})^2} = \frac{(S_{факт})^2}{(S_{набл})^2} \quad (4)$$

где  $FS$  – чувствительность модели к естественным вариациям ее какого-либо входного фактора;

$A$  – критерий (3);

$A'$  – значение  $A$ , получаемое при подстановке перепутанных случайным образом наблюдаемых значений выбранного входного фактора (имеющих, очевидно, прежнее статистическое распределение и дисперсию);

$(S_{разн})^2$  – дисперсия для разности расчетного и наблюдаемого значений выходной переменной (гидрохимического стока), рассчитываемая по уравнениям (2) с использованием в них наблюдаемых значений фактора;

$(S'_{разн})^2$  – эта же дисперсия при подстановке в (2) случайно перепутанных значений фактора;

$(S_{факт})^2$  – вклад естественных вариаций входного фактора в дисперсию выходной переменной (рассчитываемого стока);

$(S_{набл})^2$  – дисперсия наблюдаемых значений выходной переменной, используемая для нормировки  $FS$ .

В (4) дисперсия, обусловленная ошибками наблюдений за входным фактором, будет присутствовать и в  $(S'_{разн})^2$ , и в  $(S_{разн})^2$ . Поэтому она не будет влиять на значение  $FS$  из-за ее взаимного вычитания в числителе выражения (4) [3]. Тем самым  $FS$  оценивает чувствительность модели непосредственно к естественным вариациям входного фактора, исключая ошибки его наблюдений.

Отметим, что чувствительность  $FS$  может быть выражена и через показатель RSR. Учитывая равенство  $RSR=A\sqrt{2}$ , имеем

$FS = [(RSR')^2 - (RSR)^2] / 2$ . Подобно  $A'$  в (4), показатель  $RSR'$  равен  $RSR$ , полученному через использование случайно перепутанных наблюдаемых значений выбранного входного фактора вместо первоначальных правильных.

Очевидно,  $FS$  характеризует также относительную значимость факторов среды для модели. Поскольку чувствительность  $FS$  согласно (4) выражается в долях от  $(S_{набл})^2$ , то ее можно выражать в процентах, умножая на 100.

### Результаты и их обсуждение

Выполненные оценки адекватности и чувствительности модели гидрохимического стока по рядам рассчитанных и наблюдаемых стоков  $PO_4$  приведены в таблице.

Рассмотрим значения адекватности  $A$  в таблице для анализируемой модели (2). Последняя объединена с моделью пространственного обобщения температур ( $A = 0,39$ ) и осадков ( $A = 0,62$ ) [5] и моделью водного стока ( $A = 0,6$ ) [6] через использование результатов расчетов по ним в (2). Согласно данным таблицы 1 в среднем по гидрологическим сезонам адекватность  $A$  модели (2) составляет 0,53. По правилу сложения дисперсий погрешность расчета гидрохимического стока по уравнениям (2) должна быть сопоставима с погрешностями расчета как осадков, так и водного стока. В то же время полученный критерий  $A$  даже уменьшился по сравнению с его значениями для этих двух переменных. Отсюда можно сделать вывод, что уравнения (2а) и (2б) с хорошей точностью описывают соответствующие гидрохимические процессы в речных бассейнах и дают малый собственный вклад в общую погрешность расчетов стока  $PO_4$ .

Из значений чувствительности модели (2) к факторам среды в таблице видно, что основное влияние на сток  $PO_4$  оказывают водные стоки  $Q_k$  с отдельных ландшафтов, то есть ландшафтная структура речных бассейнов. Меньшую роль играют пашня, поперечный уклон и осадки.

Чувствительность модели стока фосфатов (2) к вариациям факторов среды (табл.) позволяет найти все основные компоненты дисперсии невязки  $(S_{разн})^2$  расчетов по ней. Дисперсию со всеми ее компонентами будем далее **нормировать** на  $(S_{набл})^2$  стока  $PO_4$  по аналогии с (3).

Модели (а) пространственного обобщения и нормировки среднемесячных температур и месячных осадков, (б) водного стока и (в) стока  $PO_4$  объединены согласно уравнениям (2) в одну полную имитационную модель климата, водного и гидрохимического стоков. Выходная переменная  $P$  у модели «а», как и  $Q_k$  с  $Q$  у «б», являются входными факторами для «в». Вклады факторов в дисперсию невязки математических моделей складываются [3, 4]. С учетом этого сложения, нормировки факторов, чувствительности  $FS$  и адекватности  $A$  по (3) нормированная дисперсия невязки  $(S_{разн})^2 / (S_{набл})^2 = 2A^2$  расчетов стока  $PO_4$  составит:

$$(S_{разн})^2 / (S_{набл})^2 \approx FS_P \times 2A_{а}^2 + FS_Q \times 2A_{б}^2 + 2A_{в}^2 \approx 2A^2, \quad (5a)$$

где индексы «а», «б», «в» относятся к соответствующим моделям. В (5а) также учтено, что погрешность данных наблюдений за водными стоками  $Q$  и осадками  $P$  достаточно мала [3], и ее влиянием на значения  $A_{б}$  и  $A_{а}$  можно пренебречь.

Таблица

Адекватность модели стока фосфатов и ее чувствительность к вариациям факторов среды

Характеристика	Гидрологические сезоны				Среднее
	1	2	3	4	
Стандартное отклонение <sup>1</sup> $S_{набл}$ наблюдаемых стоков $PO_4$ , %	90	87	98	85	90
Адекватность <sup>2</sup> $A$ модели стока $PO_4$	0,56	0,53	0,49	0,53	0,53
Чувствительность <sup>3</sup> $FS_Q$ к водным стокам $Q_k$ с ландшафтов (то есть к ландшафтной структуре бассейнов), %	(>100) <sup>4</sup>	52	55	48	52
Чувствительность $FS_S$ к площади пашни $S$ , %	4	16	16	16	13
Чувствительность $FS_K$ к поперечному уклону бассейнов $K$ , %	15	14	5	7	10
Чувствительность $FS_P$ к осадкам $P^5$ , %	9	0	5	16	7.5

<sup>1</sup>Рассчитано как среднее стандартное отклонение для нормированных наблюдаемых гидрохимических стоков 34 речных бассейнов и умножено на 100%; одновременно соответствует сезонным значениям  $S_{набл}$  (%).

<sup>2</sup>Выражается в долях единицы.

<sup>3</sup>Оценивается по (4) и выражается в процентах от дисперсии  $(S_{набл})^2$ .

<sup>4</sup>Неадекватный скачок  $FS_Q$  из-за перепутывания в (4) водных стоков  $Q_k$ , различающихся у разных ландшафтов на порядок. Компьютерная программа случайного перепутывания в данном случае привела к перемножению больших стоков и больших концентраций  $PO_4$  с неадекватным ростом  $(S_{факт})^2$  в (4). В расчетах ниже этот скачок  $FS_Q$  не учитывается.

<sup>5</sup>В первом сезоне (зимняя межень) осадки  $P$  взяты за IX-XI мес. предшествующего года.



Из (5а) легко найти адекватность  $A_{«в»}$  для модели «в». В отличие от  $A$  (табл.), характеризующей точность расчетов стока  $PO_4$  с использованием рассчитанных по другим моделям/подмоделям осадкам  $P$  и водным стокам  $Q_k, Q$ , значение  $A_{«в»}$  определяет адекватность собственно модели «в», то есть уравнений (2). Используя средние значения  $A_{«а»} = 0,62$  [5],  $A_{«б»} = 0,6$  [6] вместе с  $A = 0,53$ ,  $FS_p = 0,075$ ,  $FS_Q = 0,52$  (табл.), из (5а) получаем:

$$0,075 \times 2(0,62)^2 + 0,52 \times 2(0,6)^2 + 2A_{«в»}^2 = 2(0,53)^2$$

или  $A_{«в»} = 0,25$ . . (5б)

Рассмотрим модель стока фосфатов (2) с адекватностью  $A_{«в»}$  подробнее. Для нее входными факторами, помимо  $P, Q_k, Q$ , являются поперечный уклон  $K$  речных бассейнов и площадь пашни  $S$ . Оба последних фактора вместе с погрешностью данных о концентрациях фосфатов и погрешностью самих уравнений (2) должны влиять на значение  $A_{«в»}$ . Учитывая вклады всех перечисленных характеристик в нормированную дисперсию невязки  $2A_{«в»}^2$ , можно записать в процентах:

$$D_K + D_S + D_M + D_C \approx 2A_{«в»}^2 \times 100\% = 13\%, \quad (6)$$

где вклад  $D_K$  обусловлен вариациями поперечного уклона  $K$  речных бассейнов;

$D_S$  – вариациями площадей пашни  $S$ ;

$D_M$  – погрешностью самих уравнений (2);

$D_C$  – влияющей на невязку погрешностью данных о концентрациях  $PO_4$  в речном стоке.

Расчет  $D_C$ . Измерения массовой концентрации  $PO_4$  выполнялись государственным Управлением по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды на основе методики РД 52.24.382-95. Погрешность  $E$  этих измерений зависела от значений концентрации и при доверительной вероятности 0,95 составила  $E = 25\%$ . Поскольку на каждый сезон в большинстве случаев приходилось по одному измерению концентраций, то полученную погрешность  $E$  можно рассматривать и как их среднесезонную характеристику. В соответствии со стандартно принимаемой при измерениях доверительной вероятностью 0,95 в интервале от  $-E$  до  $+E$  в 95% случаев находится «истинная» концентрация. При нормальном распределении вероятностей в интервал  $\pm 2\sigma$  «стандартное отклонение» также попадает 95% значений многократно измеряемой характеристики, то есть оба интервала совпадают. Поэтому для погрешности концентраций веществ можно принять стандартное отклонение  $E/2$  и дисперсию  $(E/2)^2$ . Отсюда находим  $D_C$ , как и раньше нормируя  $(E/2)^2$  на среднюю дисперсию  $(S_{набл})^2$  наблюдаемого гидрохимического стока (среднее  $S_{набл}$  в табл.):

$$D_C \approx (E/2)^2 / (S_{набл})^2 \times 100\% =$$

$$= (25/2)^2 / (90)^2 \times 100\% \approx 1,9\%$$

Расчет  $D_K$ . При обсуждении выше уравнения (4) для чувствительности  $FS$  показано, что  $FS$  отражает влияние только естественных вариаций входного фактора и исключает случайные ошибки его наблюдений. Аналогичным образом в  $FS$  будут исключаться и вероятностные ошибки расчетных значений входного фактора. Например, в  $FS_K, FS_S$  (табл.) будут исключаться ошибки как картографических данных, так и самого расчета по ним поперечного уклона  $K$  и площади пашни  $S$ . Вклад  $D$  от таких ошибок в дисперсию невязки (6), очевидно, будет во столько раз меньше/больше значений  $FS$ , настолько будет меньше/больше отношение дисперсии этих ошибок  $(S_{ошиб})^2$  к дисперсии естественных вариаций фактора  $(S_{вар})^2$  [3]:

$$D = (S_{ошиб})^2 / (S_{вар})^2 \times FS. \quad (7)$$

В уравнении (6) для определения вклада  $D_K$  необходимо знать  $S_{ошиб}$  и  $S_{вар}$  значений поперечного уклона  $K$ . Воспользуемся градацией крутизны склонов в горных регионах по Н.Л. Беручашвили [9], разработанной на большом эмпирическом материале. В каждом интервале этой градации, 0-4, 4-10, 10-20, 20-30, 30-45,  $>45^\circ$ , находящиеся в его пределах уклоны поверхности не различаются между собой и относятся к одной категории. Иначе говоря, выделенные интервалы отражают объективную погрешность подобных оценок, возникающую из-за наличия на характеризующей территории других уклонов, резко отличающихся от  $K$ . Например, это «пилообразный» профиль горного рельефа, аппроксимируемый в рассматриваемой модели (2) прямой с заметно меньшим уклоном  $K$ . Средний для рассматриваемых 34 речных бассейнов поперечный уклон  $K$  составил 14 промилле, то есть около  $1^\circ$ . Взяв отвечающий этому значению интервал крутизны 0-4°, находим отвечающую ему погрешность оценок  $\pm E \approx \pm 4^\circ / 2 = \pm 2^\circ$  и выражаем ее в процентах от среднего значения крутизны в данном интервале  $E \approx 2^\circ / ((4^\circ + 0^\circ) / 2) \times 100\% = 100\%$ . Сопоставляя  $E$  и  $S_{ошиб}$ , как и в случае  $D_C$ , получаем

$$S_{ошиб} = E/2 \approx 50\% \text{ и } (S_{ошиб})^2 \approx 2500.$$

Для расчета дисперсии  $(S_{вар})^2$  у естественных вариаций поперечного уклона  $K$  нам понадобится дисперсия  $D_{разб}$  у случайного разброса значений какого-либо фактора  $X$  от  $a$  до  $b$ . Формула для дисперсии случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  $ab$ , имеет вид:

$$D_{разб} = \int_a^b (X - \bar{X})^2 \frac{1}{b-a} dX = \frac{(b-a)^2}{12},$$

где  $a, b$  – границы вариаций случайной величины;

$1/(b-a)$  – плотность равномерного распределения  $X$  на отрезке  $ачb$ ;

$\bar{X} = (a+b)/2$  – среднее значение величины.

Поскольку нами используются относительные (нормированные) значения, то  $a, b$  надо нормировать на среднее значение  $(a+b)/2$ .

В результате получаем:

$$D_{разб} = \frac{(b-a)^2}{12} / \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{b-a}{a+b} \right)^2.$$

Минимальное значение уклонов  $K$ , рассчитанных для 34 речных бассейнов, близко к 0, то есть можно положить  $a \approx 0$ . Используя  $a \approx 0$  в выражении для  $D_{разб}$ , находим  $(S_{вар})^2$ :

$$(S_{вар})^2 \approx D_{разб} \times 100\% \times 100\% = \frac{1}{3} \left( \frac{b-0}{0+b} \right)^2 \times 10^4 \approx 3300.$$

Наконец, по уравнению (7) находим вклад  $D_K$ , используя полученные значения  $(S_{ошиб})^2 = 2500$ ,  $(S_{вар})^2 = 3300$  и  $FS_K = 10\%$  для поперечного уклона  $K$  (табл.):

$$D_K \approx 2500 / 3300 \times 10\% = 7,6\%.$$

**Расчет  $D_S$ .** По личному сообщению эксперта д.г.н. Д.В. Черных, погрешность  $E$  определения площадей для отдельных групп геосистем (ландшафтов) и пашни близка к 10%. Тогда дисперсия ошибок площадей, подобно случаю измерений концентраций веществ, составит  $(S_{ошиб})^2 = (E/2)^2 = (10/2)^2 = 25$ . Дисперсия же вариаций площадей, по аналогии с вариациями уклонов  $K$  речных бассейнов, будет равна  $(S_{вар})^2 = 3300$ . Средняя чувствительность  $FS_S$  к вариациям площади пашни составляет 13%. Учитывая уравнение (7) и приведенные оценки дисперсий, получаем значение  $D_S$ :

$$D_S \approx (S_{ошиб})^2 / (S_{вар})^2 \times FS_S = 25 / 3300 \times 13\% \approx 0,1\%$$

**Расчет  $D_M$ .** Теперь мы можем найти вклад  $D_M$ , подставляя в уравнение (6) найденные вклады  $D_K, D_S, D_C$  входных факторов уравнений (2):

$$D_M \approx 13\% - D_K - D_S - D_C = 13\% - 7,6\% - 0,1\% - 1,9\% \approx 3\%.$$

Полученная величина  $D_M = 3\%$  характеризует вклад в дисперсию невязки расчетов от погрешности непосредственно самой модели стока фосфатов (2) [2] и выражена в процентах от дисперсии  $(S_{набл})^2$  наблюдаемых значений этого стока (табл. 1).  $D_M$  гораздо меньше аналогичного показателя у модели водного

стока [3], что говорит о высокой адекватности уравнений (2).

### Заключение

Использован простой метод для оценки чувствительности математических моделей к естественным вариациям факторов среды. Он позволил охарактеризовать чувствительность тестируемой модели стока фосфатов в Алтае-Саянской горной стране и осуществить полный компонентный анализ дисперсии ее невязки. Такой анализ дает более объективную и полную характеристику качества модели по сравнению с традиционными критериями, например,  $RSR = S_{разн} / S_{набл}$  (отношение невязки  $S_{разн}$  к стандартному отклонению данных наблюдений  $S_{набл}$ , сравни уравнение (3)) или критерием Нэша-Сатклиффа  $NSE = 1 - RSR^2$  [8]. Это обусловлено тем, что в  $RSR$  и  $NSE$  невозможно отделить собственно погрешность модели от погрешностей наблюдений или расчетов ее входных факторов и наблюдений ее выходной переменной.

По найденному вкладу  $D_M$  в дисперсию невязки модели стока фосфатов легко рассчитать более корректные значения  $RSR_M$  и  $NSE_M = 1 - (RSR_M)^2$ , характеризующие уже погрешность непосредственно самой модели. В соответствии с (3) и (6),  $RSR_M$  связан с  $D_M$  соотношением  $RSR_M = \sqrt{D_M}$ . В нашем случае

$D_M = 3\%$ . Отсюда получаем  $RSR_M = \sqrt{0,03} \approx 0,17$  и  $NSE_M = 1 - (RSR_M)^2 = 1 - 0,03 = 0,97$ . Согласно общепринятому рейтингу гидрологических моделей [8], их очень хорошему качеству соответствуют значения  $0,0 < RSR \leq 0,50$  и  $0,75 < NSE \leq 1,0$ . Таким образом, разработанная универсальная модель стока фосфатов ( $PO_4^{3-}$ ) имеет очень хорошее качество, что является редким случаем для универсальных моделей в целом. Достижение этого качества при расчете стока  $PO_4$  возможно при использовании в уравнениях (2) вместо расчетных нормированных осадков  $P$  и водных стоков  $Q$  их наблюдаемых значений. Все это обеспечивает возможность практического применения модели для различных рек Алтае-Саянской горной страны, а при дополнительной идентификации (уточнении значений ее параметров) – для других горных территорий.

### Библиографический список

1. looss B., Lemaitre P. A review on global sensitivity analysis methods. In: Uncertainty management in Simulation-Optimization of Complex Systems: Algorithms and Applications, C. Meloni and G. Dellino (Eds.). – Springer US, 2015. – 264 p.
2. Кирста Ю.Б., Пузанов А.В. Моделирование гидрохимического стока горных рек:

1. Модель стока фосфатов // Вестник Алтайского ГАУ. – 2016. – № 6(140). – С. 78-84.

3. Кирста Ю.Б. Чувствительность моделей речного стока к факторам среды и ее количественная оценка // Известия Самарского научного центра РАН. – 2015. – Т. 17. – № 6. – С. 97-103.

4. Кирста Ю.Б., Кирста Б.Ю. Информационно-физический закон построения эволюционных систем. Системно-аналитическое моделирование экосистем. – Барнаул: Изд-во Алт. гос. ун-та, 2014. – 283 с.

5. Кирста Ю.Б. Пространственное обобщение климатических характеристик для горных территорий // Мир науки, культуры, образования. – 2011. – № 3(28). – С. 330-337.

6. Кирста Ю.Б., Пузанов А.В., Ловцкая О.В., Лубенец Л.Ф., Кузник Я.Э., Пахотнова А.Ю. Имитационная математическая модель стока средних и малых рек для горных территорий // Известия Самарского научного центра РАН. – 2012. – Т. 14. – № 1(9). – С. 2334-2342.

7. Moriasi D.N., Arnold J.G., Van Liew M.W., Bingner R.L., Harmel R.D., Veith T.L. Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulation // Transactions of the ASABE. – 2007. – Vol. 50(3). – P. 885-900.

8. Koch M., Cherie N. SWAT-modeling of the impact of future climate change on the hydrology and the water resources in the upper blue Nile river basin, Ethiopia. In: Proceedings of the 6th International Conference on Water Resources and Environment Research, ICWRER 2013. – Koblenz; Germany. – June 3-7. – 2013. – P. 428-523.

9. Беручашвили Н.Л., Жучкова В.К. Методы комплексных физико-географических исследований. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1997. – 320 с.

#### References

1. looss B., Lemaitre P. A review on global sensitivity analysis methods. In: Uncertainty management in Simulation-Optimization of Com-

plex Systems: Algorithms and Applications, C. Meloni and G. Dellino (Eds.). – Springer US, 2015. – 264 p.

2. Kirsta Yu.B., Puzanov A.V. Modelirovanie gidrokhimicheskogo stoka gornyykh rek: 1. Model' stoka fosfatov // Vestnik Altaiskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – 2016. – № 6(140). – S. 78-84.

3. Kirsta Yu.B. Chuvstvitel'nost' modelei rechnogo stoka k faktoram sredy i ee kolichestvennaya otsenka // Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN. – 2015. – Т. 17. – № 6. – S. 97-103.

4. Kirsta Yu.B., Kirsta B.Yu. Informatsionno-fizicheskii zakon postroeniya evolyutsionnykh sistem. Sistemno-analiticheskoe modelirovanie ekosistem. – Barnaul: Izd-vo Alt. gos. un-ta, 2014. – 283 s.

5. Kirsta Yu.B. Prostranstvennoe obobshchenie klimaticheskikh kharakteristik dlya gornyykh territorii // Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya. – 2011. – № 3 (28). – S. 330-337.

6. Kirsta Yu.B., Puzanov A.V., Lovtskaya O.V., Lubenets L.F., Kuznyak Ya.E., Pakhotnova A.Yu. Imitatsionnaya matematicheskaya model' stoka srednikh i malykh rek dlya gornyykh territorii // Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN. – 2012. – Т. 14. – № 1 (9). – S. 2334-2342.

7. Moriasi D.N., Arnold J.G., Van Liew M.W., Bingner R.L., Harmel R.D., Veith T.L. Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulation // Transactions of the ASABE. – 2007. – Vol. 50 (3). – P. 885-900.

8. Koch M., Cherie N. SWAT-modeling of the impact of future climate change on the hydrology and the water resources in the upper blue Nile river basin, Ethiopia. In: Proceedings of the 6th International Conference on Water Resources and Environment Research, ICWRER 2013. Koblenz, Germany, June 3-7, 2013. – P. 428-523.

9. Beruchashvili N.L., Zhuchkova V.K. Metody kompleksnykh fiziko-geograficheskikh issledovaniy. – М.: Izd-vo Moskovskogo un-ta, 1997. – 320 s.

