erat dis. … kand. tekhn. nauk. – M.: VIESKh, 2013. – 20 s.

9. Patent No. 2629259 RF, MPK A23K 1/10. Sverkhvysokochastotnaya ustanovka dlya varki otkhodov uboya ptitsy i zhivotnykh / G.V. Zhdankin, G.V. Novikova; zayavitel i patentoobladatel NGSKhA (RU). – No. 2016146640; zayavl. 28.11.2016. Byul. No. 25 ot 28.08.2017. – 10 s.

10. Zhdankin G.V., Ziganshin B.G., Belova M.V. Razrabotka mnogomodulnoy sverkhvysokochastotnoy ustanovki dlya termoobrabotki syrya zhivotnogo proiskhozhdeniya // Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – 2016. – No. 4 (42). – S. 79-83.

11. Glushakov S.V., Zhakin I.A. Matematicheskoe modelirovanie. MathCad 2000. Matlab 5.3. – M.: Folio, 2001. – 528 s.

12. agroserver.ru› Torgovaya ploshchadka› kormovoy-ekstruder-ek-40.

УДК 631.33

В.Ф. Пащенко, Ю.Н. Сыромятников, Н.С. Храмов
V.F. Pashchenko, Yu.N. Syromyatnikov, N.S. Khramov

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПРИЦЕПНЫХ ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩИХ МАШИН

SOLVING THE PROBLEMS OF STABILITY OF TRAILED TILLAGE EQUIPMENT

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, обратная задача, вероятностный характер, динамические системы, устойчивость движения, метод, процессы эксплуатации, математический аппарат, механические системы, начальный момент.*

Практика решения систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику функционирования сельскохозяйственных машин и агрегатов в целом, показала, что они могут решаться только численным методом и само решение можно получить крайне редко. Это объясняется тем, что в задачах земледельческой механики, как правило, решается обратная задача, в которой задаются силы, действующие на механическую систему, и определяется закон движения последней. Поэтому дифференциальное уравнение или их система решаются только в том случае, если в начальный момент её движения силы, действующие на неё, будут находиться в равновесии. Процессы, которые проходят в машинно-тракторных агрегатах при взаимодействии с внешней средой, имеют сложный вероятностный характер и не являются стационарными. Поэтому результаты решений дифференциальных уравнений не всегда могут удовлетворять необходимой степени адекватности реальным условиям. В реальных условиях внешнее воздействие на машинные агрегаты носит вероятностный характер и представлено дискретными скачками. Для изучения степени такого влияния на динамические системы проводили исследования на устойчивость движения. В связи с наличием в машинных агрегатах управляющих механизмов и сравнительно небольшими значениями внешних возмущающих воздействий по отношению массы энерго-

средства исследование дифференциальных уравнений целесообразно проводить на асимптотическую устойчивость. Для построения функций возмущенного движения может использоваться второй метод Ляпунова. Исследование функций возмущённого и невозмущённого движения позволяет составить дифференциальное уравнение или их систему возмущения, решение которых и позволяет провести исследования на устойчивость механических систем.

Keywords: *differential equation, inverse problem, probabilistic character, dynamic systems, stability of motion, method, operation processes, mathematical apparatus, mechanical systems, initial moment.*

The practice of solving systems of differential equations describing the dynamics of the functioning of agricultural machines and aggregates as a whole showed that they may be solved only by a numerical method and the solution itself may be obtained extremely rarely. This is explained by the fact that in the problems of agricultural mechanics, as a rule, an inverse problem is solved in which the forces acting on the mechanical system are given, and the law of motion of the latter is determined. Therefore, the differential equation or their system is solved only if at the initial moment of its movement the forces acting on it are in equilibrium. The processes that take place in machine and tractor units when interacting with the external environment are of a complex probabilistic nature and are not stationary. Therefore, the results of solutions of differential equations cannot always satisfy the necessary degree of adequacy to real conditions. In real conditions, the most probabilistic nature of the external effect on equipment units are constantly repeated discrete jumps. Investigations on the stability of motion were carried out to study the degree of such influence on dynamic systems. Due to the presence of control mechanisms in equipment units and comparatively small values of external disturbing influences with respect to the mass of the energy unit, it is expedient to study the differential equations for asymptotic stability. To construct the disturbed motion functions, the second Lyapunov method may be used. The study of the functions of the perturbed and undisturbed motion makes it possible to compose a differential equation or their perturbation system, the solution of which makes it possible to carry out investigations on the stability of mechanical systems.

Пащенко Владимир Филимонович, д.т.н., проф., Харьковский национальный аграрный университет им. В.В. Докучаева, Харьковская обл., Украина. E-mail: gara176@meta.ua.

Сыромятников Юрий Николаевич, аспирант, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Украина. E-mail: gara176@meta.ua.

Храмов Никита Сергеевич, ассист., Николаевский национальный аграрный университет, г. Николаев, Украина. E-mail: khramov88@ukr.net.

Pashchenko Vladimir Filimonovich, Dr. Tech. Sci., Prof., Kharkov National Agricultural University named after V.V. Dokuchayev, Ukraine. E-mail: gara176@meta.ua.

Syromyatnikov Yuriy Nikolayevich, post-graduate student, Kharkov National Technical University of Agriculture named after P.M. Vasilenko, Kharkov, Ukraine. E-mail: gara176@meta.ua.

Khramov Nikita Sergeyevich, Asst., Nikolaev National Agricultural University, Ukraine. E-mail: khramov88@ukr.net.

Введение

Задачи теории устойчивости движения прицепных машин и орудий не охватывают всего комплекса вопросов данной проблемы. Они касаются только частных случаев и поэтому не могут служить основанием для широких обобщений. Тем более что и само решение этих задач осуществлялось при определенных ограничениях, которые не всегда имеют место в действительных условиях. Но при этом полученные результаты не теряют своего практического значения, дают ценные указания в отношении способов повышения устойчивости движения прицепных машин и орудий при решении конструктивных задач [1]. Дальнейшие исследования по этой проблеме должны быть направлены, с одной стороны, на разработку механико-математических принципов, а с другой, – на решение конкретных задач, вызываемых потребностями практики проектирования и расчета сельскохозяйственных машин и орудий.

Постановка проблемы

Практика решения систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику функционирования сельскохозяйственных машин и агрегатов в целом, показала, что они могут решаться только численным методом и само решение можно получить крайне редко. Это объясняется тем, что в задачах земледельческой механики, как правило, решается обратная задача, в которой задаются силы, действующие на механическую систему, и определяется закон движения последней. Поэтому дифференциальное уравнение или их система решаются только в том случае, если в начальный момент её движения силы, действующие на неё, будут находиться в равновесии.

При исследованиях вопросов устойчивости решения систем дифференциальных уравнений в обыкновенных производных соответствующий математический аппарат построен для систем приведенных дифференциальных уравнений 1-го порядка [2]. Переход от систем дифференциальных уравнений, построенных согласно реализации метода Лагранжа, описания динамики исследуемой системы к приведенным системам 1-го порядка осуществляется сравнительно просто:

а) введением новых функций, механическое толкование которых иногда затруднительно, но это необходимо для аналитических преобразований;

б) разрешением каждого из полученных уравнений относительно соответствующей 1-й производной после введения новых функций.

Учитывая вышеприведенную аргументацию при рассмотрении вопросов устойчивости решения дифференциальных уравнений динамики, используется представление соответствующих преобразованных уравнений в виде:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \overline{f}\left(t, \overline{y}\right) \quad \left[\frac{dy_j}{dt} = f_i\left(t, y_1, y_2 ... y_n\right)\right], \quad (1)$$

где t – независимая переменная (время);

$\overline{y}$ – n-мерный вектор, компоненты которого суть искомые функции;

$\overline{f}$ – n-мерный вектор, компоненты которого обусловлены выбором обобщенной системы координат, учитываемыми обобщенными силами, дополнительно введенными функциями, использованными при преобразованиях системы уравнений Лагранжа для соответствующего механического процесса к системе (нормальных) приведенных дифференциальных уравнений.

Анализ сенса и структуры возникающих в исследованиях реальных механических системах, используемых при моделировании динамики сельскохозяйственных машин и агрегатов, позволяет принять достаточные для практического применения предположения, что функции $f_j\ (t_1\ y_1,\ y_2 \dots y_n)$ являются непрерывными функциями своих аргументов и имеют непрерывные частные производные первого порядка по аргументам $(t,\ y_1,\ y_2 \dots,\ y_n)$ в области значений, отображающей реально значимые величины.

Анализ исследований и публикаций

Вопросам высококачественного анализа решений систем вида (1) посвящены выполненные в конце XIX столетия работы А.М. Ляпунова [3]. Значимость этих работ подтверждается исследованиями других ученых в широком диапазоне технических приложений практического использования результатов А.М. Ляпунова. В математической литературе необходимые и достаточные условия принципа Лагранжа формулируются с использованием математического аппарата теории А.М. Ляпунова [2].

Теория устойчивости по Ляпунову является общепризнанной и продолжает интенсивно разрабатываться с учетом специфики применения в различных областях науки и техники и отображения глубины и специфики изучения высокотехнологических процессов. Основные соответствующие понятия и математический аппарат на уровне знаний общего курса высшей математики согласно программе обучения в вузах изложены в [2].

Избегая строгости изложения теории устойчивости, свойственной соответствующим математическим работам, мы сочли необходимым, используя соответствующие понятия, дать им определенную физическую трактовку, обусловленную практическим применением.

Формулирование целей статьи

Для проверки объективности гипотезы, оценки ее возможностей и эффективности широко используется моделирование сущности возникающих технических идей. Из возможного спектра моделирования мы рассмотрим основные аспекты математического моделирования. А так как работа соответствующих машин и агрегатов выполняется в условиях, изменяющихся во времени, то мы рассмотрим использование аппарата дифференциальных уравнений и имеющихся результатов соответствующих теоретических построений относительно исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений. Так как процессы эксплуатации сельскохозяйственных машин и агрегатов всегда происходят при изменяющихся во времени условиях, то гарантии стабильности работы тесно связаны с вопросами устойчивости решений соответствующих дифференциальных уравнений или систем.

Основной материал

Основные понятия и вопросы теории устойчивости соотносятся к решению задачи Коши для системы дифференциального уравнения вида (1) при учете соответствующих ограничений на величины тех параметров физической системы, которые нашли свое воплощение при построении соответствующей математической модели. Суть задачи Коши: найти зависимое от времени решение системы вида (1), удовлетворяющее определенным начальным условиям. При этом учитываются величины всех физических параметров, определяющих воплощение исследуемой механической системы в образе ее математической модели. Естественно, необходимы гарантии адекватности реальной физической системы и ее математической модели на множестве исследуемых свойств: прочность, ход технологического процесса, вариации изменения технологических параметров и т.д. Как доказано в теории решения систем дифференциального уравнения вида (1), решение задачи Коши при указанных аналитических свойствах правых частей дифференциального уравнения имеет единственное решение [2]. При этом решение мы интерпретируем как некоторую вектор-функцию $\overline{\eta}\left(t_1\ t_{0,}\ y_{1,}^0\ y_2^0,\ldots y_n^0\right)$, компоненты которой есть функции, зависящие от времени, начального (некоторого) момента времени и значений величин функций, выбранных для математического моделирования процесса, в начальный момент времени $t = t_0$.

Анализируя результаты теоретических исследований математической теории устойчивости, есть основания утверждать, что все они сопоставляются некоторому решению задачи Коши для систем дифференциальных уравнений вида (1). При этом много работ посвящено специальным частным вопросам устойчивости, имеющим практическое значение:

– устойчивость по части переменных, использованных в построении соответствующей математической модели;

– устойчивость равновесных и стационарных движений;

– установления классов (классификация) устойчивых решений систем дифференциального уравнения вида (1);

– методы сравнения при исследовании проблем устойчивости;

– методы построения специальных функций А.М. Ляпунова для определенных классов дифференциальных уравнений вида (1).

Приведем основные математические понятия и результаты математической теории устойчивости и их применение при решении практических задач. Как доказано, для систем дифференциальных уравнений вида (1) при оговоренных условиях относительно свойств правых частей имеет место интегральная непрерывность. Если $\overline{\eta}(t) = \left(t_1\ t_{0,}\ y_{1,}^0\ y_2^0,\ldots y_n^0\right)$, есть решение системы (1) для t из некоторого промежутка времени при некоторых начальных условиях, отвечающих определенному моменту времени t_0, то любое решение $\overline{z}\,(t)$, расположенное в некоторый момент t из промежутка, где существует решение $\overline{\eta}(t)$, близко (в определенном смысле, в определенной мере) к нему будет тоже близко к решению $\eta\,(t)$ для некоторого множества значений t из промежутка существования решения $\overline{\eta}\,(t)$. То есть решения, проходящее «близко» к другому решению в какой-то момент времени, будут «близкими» к нему в условленной окрестности. Свойство интегральной непрерывности отображает свойства стабильности исследуемой математической модели, а если она адекватна соответствующей физической системе, то обеспечивает стабильность процессов в такой системе естественно в некоторых диапазонах величин, характеризующих процесс.

Исследования устойчивости решения систем дифференциальных уравнений вида (1) базируются на сравнении отличий возможных решений от некоторого рассматриваемого решения. (В основе исследований устойчивости решения систем дифференциальных уравнений вида (1) лежит сравнение отличий возможных решений от некоторого рассматриваемого решения.) Необходимо подчеркнуть, что аналитического представления в каждом конкретном случае может не быть. Требуемые свойства отсутствующих решений определяются на основании анализа особенностей правых частей дифференциальных уравнений вида (1), которые всегда должны быть так или иначе аналитически представимы.

Решение $\overline{\eta}(t)$ системы (1) называется устойчивым (по А.М. Ляпунову) при $t \to \infty$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (a, \infty)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, такое, что: (можно указать, определить $\delta(\varepsilon, t_0)$;

– все решения $y = y(t)$ системы (1) (включая решения $\eta(t)$), удовлетворяющие условию $\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta$, определены в промежутке $t_0 < t < \infty$;

– для таких решений справедливо неравенство $\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$ при $t_0 \le t \le \infty$, где запись $\|A\|$ отображает (свидетельствует о норме соответствующего оператора, являющейся обобщением понятия расстояния между объектами (функциями) в исследуемом функциональном пространстве.

Согласно этому определению устойчивости некоторого решения $\overline{\eta}(t)$ системы (1) задачи Коши у системы (1) должны быть решения с начальными условиями близкими к начальным параметрам движения, породившим исследуемое решение $\overline{\eta}(t)$, и с течением времени такие решения остаются близкими к исследуемому. Естественно, что условие $t \to \infty$ есть отображение абстракции, но с точки зрения моделирования реального динамического процесса это соответствует естественному требованию сохранения исследуемых динамических характеристик процесса в течение времени.

Решение $\overline{\eta}(t)$ называют неустойчивым (по Ляпунову), если для некоторых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, \infty)$ и любого $\delta > 0$ существует хотя бы одно решение $y_\delta(t)$ и момент $t_1 = t_1(\delta)$ такие, что:

$$\|y_\delta(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta \text{ и } \|y_\delta(t_1) - \eta(t_1)\| \ge \varepsilon .$$

Таким образом, такое решение $\overline{\eta}(t)$ системы (1), для которого в столь угодно малой окрестности его значений $\overline{\eta}(t_0)$, соответствующих моменту (t_0), существуют такие начальные значения компонент вектор-функции решения (1), сколь угодно мало отличающиеся от значений соответствующих компонент $\overline{\eta}(t)$, которые порождают решение $y_\delta(t)$, отклоняющееся от решения $\overline{\eta}(t)$ хотя бы в один момент t_1. При этом необходимо учитывать, что при принятых предположениях о непрерывности и дифференцируемости правых частей системы (1) ее решения будут также непрерывны, т.е. будет существовать некоторая окрестность t_1, для которой будет выполнимо условие $\|y_\delta(t) - \eta(t)\| \ge \varepsilon$.

Существенным для теоретических исследований теории устойчивости и ее практического применения является понятие асимптотической устойчивости. Решение $\eta(t)$ ($a < t < \infty$) называется асимптотически устойчивым при $t \to \infty$, если:

– это решение устойчиво по Ляпунову;

– для любого $t_0 \in (a; \infty)$ существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$, такое, что решения $y = y(t)$ ($t_0 \le t < \infty$), удовлетворяющие условию $\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \Delta$, обладают свойством $\lim\limits_{t\to\infty}\|y(t) - \eta(t)\| = 0$.

Таким образом, асимптотическая устойчивость решения $\overline{\eta}(t)$ будет тогда, когда существует такая окрестность начальных значений компонент вектор-функции $\overline{\eta}(t)$, что все решения $\overline{y}(t)$ с начальными условиями из этой окрестности с течением времени сколько угодно мало будут отличаться от решения $\overline{y}(t)$. С физической точки зрения это означает, что все возможные отклонения в определенных пределах параметров спланированного технологического процесса с течением времени будут исчезать, ход процесса будет с течением времени стабилизироваться.

В теории устойчивости движения большое внимание уделено исследованиям устойчивости решения при учете постоянно действующих возмущениях, что позволяет моделировать более широкий круг технологических процессов. В общем случае соответствующая математическая модель представима системой дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d\overline{z}}{dt} = f\left(t, \overline{z}\right) + \varphi\left(t, \overline{z}\right); \qquad (2)$$

когда кроме условий, названных при рассмотрении системы (1), необходимо учитывать некоторые постоянно действующие зависящие от времени и обобщенных перемещений факторы, влияния которых моделируется известными функциями $\varphi\,(t, z)$, дифференцируемыми по своим переменным на некотором множестве их значений.

Решение $\overline{\eta}\,(t)$ системы (2) называется устойчивым при учёте постоянно действующих возмущениях, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (a, \infty)$ существует $\delta = \delta\,(\varepsilon, t_0)$ такое, что при $\left\|\varphi(t, z)\right\| < \delta$ все решения $Z(t)$ системы, удовлетворяющие условию $\left\|Z(t_0)\right\| \le \delta$, определены на промежутке (t_0, ∞), причем $\left\|\overline{z}(t) - \overline{\eta}(t)\right\| \le \varepsilon$ при $t_0 \le t \le \infty$.

В [2] приведено доказательство очень важного для исследования устойчивости решения системы (1) свойства решений: если решение $\overline{\eta} = \overline{\eta}\,(t)$ $(a \le t < \infty)$ системы с непрерывной правой частью устойчиво для какого-либо фиксированного момента $t_0 \in (a, \infty)$, то оно будет устойчиво для произвольного момента $t'_0 \in (a, \infty)$. А так как при рассмотрении системы (2) правые части предполагаются непрерывными функциями своих аргументов, то выше названное свойство соответствует и системе (2).

В условиях повышения рабочих скоростей движения агрегатов и ширины их захвата возрастают требования к параметрам машин, обеспечивающих улучшение устойчивости их движения, которое определяет качество выполнения технологического процесса, его энергоёмкость, надёжность и долговечность работы машинных систем в целом. Для решения таких задач П.М. Василенко разработал методику построения математических моделей динамики функционирования механических систем с использованием дифференциального уравнения Лагранжа 2-го рода. Построение соответствующих моделей осуществляется в следующей последовательности [4]:

1. Составление принципиальной схемы машины, орудия или агрегата в целом, отображающей основные взаимосвязи между её составляющими.

2. Построение эквивалентной схемы машины, орудия или агрегата, на которой указываются центры масс твердых тел, оси приведенных моментов инерции вращающих масс, векторы приведенных сил внешнего воздействия, моментов и скоростей.

3. Выбор неподвижной системы отсчёта и подвижных осей координат, неизменно связанных с твёрдыми телами системы.

4. Составление уравнений с голономными связями

$$f_a = f_a\left(X_i;\ Y_i;\ Z_i;\ \psi_i; Q_i; \varphi_i; t\right); \qquad (3)$$

$$i = \overline{1, N_T},$$

где N_T – число твёрдых тел механической системы; или с неголономными связями

$$f_в = f_в\left(X_i;\ Y_i;\ Z_i;\ \psi_i; Q_i; \phi_i; \dot{X}_i; \dot{Y}_i; \dot{Z}_i; \dot{\psi}_i; \dot{Q}_i; \dot{\phi}_i; t\right). \qquad (4)$$

5. Составление аналитического выражения кинетической энергии и обобщенных сил:

$$T = \sum_{s=1}^{N_T} T_i\left(X_i;\ Y_i;\ Z_i;\ \psi_i; Q_i; \phi_i; \dot{X}_i; \dot{Y}_i; \dot{Z}_i; \dot{\psi}_i; \dot{Q}_i; \dot{\phi}_i\right); \qquad (5)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^{K} Q\left(X_k;\ Y_k;\ Z_k;\ \psi_k; Q_k; \phi_k; \dot{X}_k; \dot{Y}_k; \dot{Z}_k; \dot{\psi}_k; \dot{Q}_k; \dot{\phi}_k; t\right), \qquad (6)$$

где K – количество обобщенных сил.

Причем, составляющие обобщенной силы представляются как выражения суммы трёх сил:

$$Q_i = Q_i - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \tag{7}$$

где Q_i – обобщенная сила, не содержащая производных от потенциальной энергии;

U – потенциальная энергия;

$$U = U\left(X_i;\ Y_i;\ Z_i;\ \psi_i; Q_i; \varphi_i\right);$$

R – диссипативная функция;

$$R = R\left(X_i;\ Y_i;\ Z_i;\ \psi_i; Q_i; \phi_i;\ \dot{X}_i; \dot{Y}_i; \dot{Z}_i; \dot{\psi}_i; \dot{Q}_i; \dot{\phi}_i\right).$$

6. Составление дифференциальных уравнений, описывающих динамику функционирования системы твёрдых тел:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_{qj}; \qquad i = \overline{1, N_C}, \tag{8}$$

где N_C – число степеней свободы системы;

q_i – обобщенная координата.

С учётом уравнений (3)-(7) система уравнений (8), которая при решении задач земледельческой механики, как правило, разрешима относительно вторых производных, по времени от обобщенных координат запишется:

$$\ddot{q}_j = q_j\left(q_j; \dot{q}_j; Q_{qj}; t\right). \tag{9}$$

Практика решения таких систем дифференциальных уравнений в задачах земледельческой механики показала, что они в основном могут быть решены только численными методами и получить аналитическое решение возможно крайне редко. Это объясняется тем, что в задачах земледельческой механики решается, как правило, обратная задача теоретической механики, когда задаются силы, действующие на механическую систему, и определяется закон её движения. При этом значения сил в дифференциальной системе уравнений (9) должны быть заданы таким образом, чтобы в любой момент движения механической системы они находились в равновесии. Для решения системы дифференциальных уравнений важно, чтобы в начальных условиях все силы, действующие на механическую систему, были в равновесии. Несоблюдение вышеуказанного условия не позволяет решить систему дифференциальных уравнений. В таком случае число сил $Q_{q(k-j)}$, равное разнице между числом действующих сил *К* и числом, равным степени свободы механической системы *j*, необходимо задать, а число сил Q_j, равное *j*, определить из системы уравнений

$$M_{c1}\left[l_c^2\ddot{\varphi}_1 + l_c l_1\ddot{\varphi}_2 D_1 + l_c l_1\dot{\varphi}_2^2 D_2\right] + I_{c1}\ddot{\varphi}_1 = Q_{\varphi 1};$$

$$M_{c1}\left[l_1^2\ddot{\phi}_2 + l_1 l_c\ddot{\phi}_1 D_1\right] + \left(M_{c2}l_c^2 + I_{c2}\right)\ddot{\phi}_2 = Q_{\phi 2},$$

где $D_1 = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2;$

$D_2 = \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2.$ [3]:

$$\ddot{q}_{jo} = q_{jo}\left(q_{jo}; \dot{q}_{jo}; Q_{qj}; Q_{q(k-j)}; t_o\right), \tag{10}$$

где $\ddot{q}_{jo}; q_{jo}; \dot{q}_{jo}; t_o$ – параметры системы в начальных условиях.

Число неизвестных сил Q_j и число алгебраических уравнений равны, что позволяет найти искомые силы, значение которых обеспечивает условия равновесия сил в начальный момент движения системы, то есть создают необходимые условия для решения системы дифференциальных уравнений (9).

В результате решения системы дифференциальных уравнений получают зависимости изменения обобщённых координат во времени при различных параметрах механических систем и заданных значениях факторов внешнего воздействия на систему или закономерности их изменения во времени или пространстве. Вместе с тем процессы, которые проходят в машинно-тракторных агрегатах при взаимодействии с внешней средой, имеют сложный вероятностный характер и не являются стационарными. Поэтому результаты решения системы дифференциальных уравнений (9) не всегда могут удовлетворять в необходимой степени адекватности реальным условиям.

При построении математических моделей функционирования механической системы не представляется возможным учесть все без исключения воздействия на уровень их влияния [5]. В полевых условиях наиболее вероятный характер внешнего воздействия на машинные агрегаты являются постоянно повторяющиеся дискретные скачки. Для изучения степени такого влияния на динамические системы проводят исследования на устойчивость её движения, которая характеризует способность механических систем копировать заданную траекторию движения. Необходимые и достаточные условия устойчивого движения установлены А.М. Ляпуновым [6]. По А.М. Ляпунову система называется устойчивой, если при отклонении действий внешних сил на неё или начальные условия изменяются в определенных пределах, а изменения движения системы будут незначительными. А.В. Рославцев дал определение устойчивости движения машинно-тракторного агрегата, под которым понимают способность его обеспечивать с течением времени малые отклонения возмущённого движения от невозмущённого без вмешательства действий механизатора с помощью систем управления [7]. С учётом того, что величина возмущающих усилий, воздействующих на сельскохозяйственные машины и орудия в сравнении с массой энергосредства малы и наличием в агрегатах управляющих механизмов, то исследование дифференциальных уравнений целесообразно проводить на определение асимптотической устойчивости. Последняя определяет способность системы возвращаться до невозмущённого закона движения, мерой которой может служить время или путь, необходимые для восстановления закономерности движения системы.

Практика моделирования динамических систем в земледельческой механике показывает, что получить общие и частные решения дифференциальных уравнений либо систем уравнений, как правило, невозможно. Поэтому для решения таких задач на устойчивость целесообразно использовать второй метод Ляпунова, который предусматривает построение функций возмущённого движения [6].

Для снижения порядка у систем дифференциальных уравнений (9) обозначим $\dot{q}_j = \omega$. Тогда получим

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \omega \\ \dot{\omega} = q_i\left(q_i;\, \omega;\, Q_{qi};\, t\right). \end{cases} \tag{11}$$

В связи с тем, что в результате воздействий внешней среды на механические системы они не теряют своих связей и не приводят к изменению их, то дифференциальные уравнения, описывающие невозмущённое и возмущённое движения, аналитически тождественны. Тогда уравнения возмущённого движения механической системы будут иметь вид:

$$\dot{q}_i + \dot{\delta}_i = \omega + \beta$$

или

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \beta \\ \dot{\omega} + \dot{\beta} = q_i\left(q_i + \delta;\, \omega + \beta;\, Q_{qi};\, t\right), \end{cases} \tag{12}$$

где $\dot{\delta}_i$ – прирост обобщенной координаты в результате действия на систему возмущения;

β – прирост скорости обобщенной координаты в результате действия на систему возмущения.

Раскладываем систему уравнений (12) в ряд Тейлора с точностью до первого порядка малости:

$$\begin{gathered}\dot{\omega}+\dot{\beta}=q_i\left(q_i;\omega;Q_{qi};t\right)+\\+q'_{iqi}\left(q_i;\omega;Q_{qi};t\right)\delta+\\+q'_{i\omega}\left(q_i;\omega;Q_{qi};t\right)\beta.\end{gathered}\qquad(13)$$

Разница между искомыми уравнений возмущенного и невозмущенного движения механической системы и определит систему дифференциальных уравнений возмущений:

$$\begin{cases}\dot{\delta}_i=\beta\\ \dot{\beta}=q'_{iqi}\left(q_i;\omega;Q_{qi};t\right)\delta+q'_{i\omega}\left(q_i;\omega;Q_{qi};t\right)\beta\end{cases}.\qquad(14)$$

Степень асимптотической устойчивости системы определяется величиной времени, необходимого для возвращения её до невозмущённого движения или близкому к нему. Для этого решаются совместно системы дифференциальных уравнений невозмущённого движения системы (9) и возмущения (14). Из первой системы дифференциальных уравнений в заданное время $t_в$ находят значение обобщенной координаты q_i и скорость её изменения $\dot{q}_j=\omega$. Полученные данные используют для решения системы уравнений (14), характеризующей интенсивность возмущений с течением времени.

Следовательно, при исследовании вопроса устойчивости решения систем (1) или (2) можно проверить устойчивость только для некоторого выбранного момента времени. Если решение $\overline{\eta}(t)$ $(a \le t < \infty)$ неустойчиво при некотором фиксированном моменте времени, то оно является неустойчивым для любого другого момента. Поэтому при построении математического аппарата исследований теории устойчивости рассматривают фиксированный начальный момент $t_0 \in (a \le t < \infty)$.

Приведем кратко суть (основные идеи так названного в литературе [2]) второго или еще называемого прямого метода А.М. Ляпунова, который нашел широкое применение и в теоретических, и в практических исследованиях.

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида (1) при нелинейной правой части и при условиях, ранее названных. Как уже отмечалось, для каждой точки $t_0, \overline{y}$, удовлетворяющей указанным ранее условиям, согласно результатам исследования таких систем выполняется локальная теорема существования и единственности решения $y=y(t,t_0,y_0(t_0))$ системы (1) с начальными условиями $y\left(t_0,y_0\left(t_0\right)\right)=y_0$.

Пусть $\overline{\eta}=\overline{\eta}(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ некоторое решение системы (1), в дальнейшем называемое невозмущенным, устойчивость которого необходимо исследовать при условии, что величины возможных возмущений ограничены.

Введем в рассмотрение новую вектор-функцию $\overline{x}(t)$, характеризующую с течением времени отклонения возмущенного решения $y = y(t)$ от исследуемого $\overline{\eta}=\overline{\eta}(t)$. Представив $\overline{y}(t)=\overline{\eta}(t)+\overline{x}(t)$, для определения вектор-функции $\overline{x}(t)$, получим систему:

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t,x+\eta(t)\right)-f\left(t,\eta(t)\right).\qquad(15)$$

При этом очевидно, что при $x = 0$ правая часть (15) будет тождественным нулем.

Следовательно, система (15) имеет тривиальное решение $\overline{x}=0$. Таким образом, исследование устойчивости решения $\overline{\eta}=\overline{\eta}(t)$ приводится к исследованию устойчивости тривиального решения (положение равновесия) $x = 0$ в пространстве, определяющем возможные отклонения от исследуемого решения $\overline{\eta}=\overline{\eta}(t)$. Система (15) в литературе называется приведенной (по Ляпунову она называется системой уравнений возмущенного движения).

Выводы

Для решения задач на устойчивость движения целесообразно использовать второй метод Ляпунова, который предусматривает построение и исследование функций возмущенного движения. Степень асимптотической устойчивости системы определяется величиной времени, необходимого для возвращения её до невозмущенного движения или близкого к нему. Для этого решаются совместно системы дифференциальных уравнений невозмущенного движения системы и возмущения.

Библиографический список

1. Сыромятников Ю.Н. Повышение устойчивости движения секции комбинированной машины для подготовки почвы и посева // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – 2018. – № 4 (162). – С. 177-186.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.

3. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 171 с.

4. Василенко П.М., Василенко В.П. Методика построения расчетных моделей функционирования механических систем (машин и машинных агрегатов). – Киев, 1980. – 135 с.

5. Пащенко В.Ф. До методики побудови математичних моделей функціонування механічних систем // Вісті Академії інженерних наук України. – 2006. – № 1. – С. 27-28.

6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – С. 530.

7. Рославцев А.В. Теория движения тягово-транспортных средств // УМЦ «Триада». – М., 2003. – 171 с.

References

1. Syromyatnikov Yu.N. Povyshenie ustoychivosti dvizheniya sektsii kombinirovannoy mashiny dlya podgotovki pochvy i poseva // Vestnik Altayskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – 2018. – No. 4 (162). – S. 177-186.

2. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti. – M.: Nauka, 1967.

3. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ustoychivosti dvizheniya. – M.-L.: Gostekhizdat, 1950. – 171 s.

4. Vasilenko P.M., Vasilenko V.P. Metodika postroeniya raschetnykh modeley funktsionirovaniya mekhanicheskikh sistem (mashin i mashinnykh agregatov). – Kiev, 1980. – 135 s.

5. Pashchenko V.F. Do metodiki pobudovi matematichnikh modeley funktsionuvannya mekhanichnikh sistem // Visti Akademii inzhenernikh nauk Ukraini. – 2006. – No. 1. – S. 27-28.

6. Malkin I.G. Teoriya ustoychivosti dvizheniya. – M.: Nauka, 1966. – S. 530.

7. Roslavtsev A.V. Teoriya dvizheniya tyagovo-transportnykh sredstv // UMTs «Triada». – M., 2003. – 171 s.