

В качестве марганцовых удобрений применяют отходы обогащения марганцовых руд, содержащие 15-18% марганца; легко растворимый сульфат марганца (II) — отход нефтяной промышленности с содержанием марганца 21-22%, а также марганизированный суперфосфат, включающий 17,5-18% усвояемого оксида фосфора (V) и 1,5-2% марганца.

В качестве молибденовых удобрений применяют молибдат аммония, а также молибденизированный суперфосфат, содер-

жащий 18-20% усвояемого оксида фосфора (V) и 0.05-0,2% молибдена.

В качестве цинковых удобрений применяют различные промышленные отходы, содержащие соли цинка.

Вышеприведенный анализ особенностей химии d-элементов позволяет заключить, что многообразная роль микроэлементов в жизни растений, животных и человека обусловлена их исключительной способностью к комплексообразованию и участию в окислительно-восстановительных процессах.



УДК 556:631.6:631.95:001.891.573

Е.Д. Кошелева,
А.А. Цхай,
К.Б. Кошелев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД В СИСТЕМЕ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ*

1. Математическая модель*

В работе А.А. Цхай, К.Б. Кошелева, Н.Ю. Ким [1] было предложено математическое описание движения подземных и поверхностных вод, основанное на моделях [2-4], которое, во-первых, было бы достаточно полным, во вторых, реализуемым на доступных компьютерах (фактически это наиболее мощные персональные компьютеры) и, в-третьих, позволяло бы в условиях Алтайского края собрать необходимую эмпирическую информацию.

Пространственная схема области решения приведена на рисунке 1, где Г — граница расчетной области, P₁-P₄ — русла рек, B₁-B₂ — водоемы.

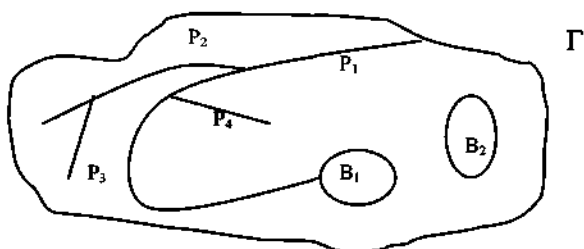


Рис. 1. Пространственная схема области совместного движения подземных и поверхностных вод

Для описания фильтрации грунтовых вод используется уравнение Буссинеска в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial y} \right) + V(x, y, t), \quad (1)$$

где x, y — декартовы координаты вдоль поверхности Земли;

t — время;

H — абсолютная отметка уровня подземных вод;

T_x, T_y — проводимости в направлениях x, y соответственно.

$$T_x = \begin{cases} k_x(z_{kp} - z_n), H \geq z_{kp} \\ k_x(H - z_n), z_n < H < z_{kp} \\ 0, H < z_n \end{cases}$$

$$T_y = \begin{cases} k_y(z_{kp} - z_n), H \geq z_{kp} \\ k_y(H - z_n), z_n < H < z_{kp} \\ 0, H < z_n \end{cases}$$

где k_x, k_y — коэффициенты фильтрации в направлениях x, y ;

z_n — отметка подошвы слоя;

z_{kp} — отметка кровли слоя.

$$\mu = \begin{cases} \mu^*, H \geq z_{kp} \\ \mu^{**}, H < z_{kp} \end{cases}$$

где μ^* — коэффициент упругости горизонта;

μ^{**} — коэффициент гравитационной водоотдачи;

* Исследование выполнялось по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (№ НШ-22.2003.5).

$V(x, y, t)$ – известный источник (сток).

Для определения течения в реках и каналах используется уравнение диффузионных волн, являющихся упрощением уравнений Сен-Венана и применяемым для расчетов уровня воды в равнинных реках. При этом предполагается, что сеть рек можно представить в виде дерева (но не в виде графа).

$$\frac{\partial \omega(s, z)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\psi(s, z) \varphi \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right) \right) + d, \quad (2)$$

где s – координата вдоль русла реки;

z – уровень воды в реке;

ω – площадь поперечного сечения потока.

$$\psi = \omega R^2 / n,$$

где n – коэффициент шероховатости Маннинга;

R – гидравлический радиус.

$$\varphi(p) = \sqrt{|p|} \operatorname{sign}(p)$$

Боковой приток:

$$d = d_1 + d_2 + d_3,$$

где d_1 – склоновый сток;

$$d_2 = - \left[T_n(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial n} \right] - \text{поступление из}$$

грунтовых вод (здесь n – нормаль к руслу реки);

d_3 – осадки и испарение.

Для моделирования уровня воды в водоемах используется балансовое соотношение:

$$\lambda \frac{\partial z}{\partial t} = - \oint \left(T_n(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial n} - d_1 \right) ds - \sum_i (\psi \varphi)_i + V \lambda$$

где z – уровень воды в водоеме, суммирование ведется по всем рекам, впадающим в водоем и вытекающим из водоема.

Граничные условия для H выглядят следующим образом.

На границе:

$$-T_n(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial n} + B_0(x, y)H = B_0(x, y)H_G \quad (3)$$

где n – нормаль к границе Γ ;

B_0 – коэффициент водообмена;

H_G – постоянное значение абсолютной отметки.

На руслах рек:

$$T_n(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial n} = \alpha(z - H^\pm) \pm \alpha_0(H^- - H^+) \quad (4)$$

где индексы $-$ и $+$ соответствуют левому и правому берегам водотока;

n – нормаль к руслу реки.

Граничное условие для уравнений течения в реках можно записать в виде:

$$\chi z + (1 - \chi) \psi \varphi = \Phi, \quad \chi \in [0..1] \quad (5)$$

Таким образом, в работе приведен один из вариантов математической модели течения подземных и поверхностных вод, пригодной для численной реализации. Можно выделить два класса вычислительных методов: конечно-разностные методы и метод конечных элементов. Метод конечных элементов более гибок, чем конечно-разностные методы, для построения разностных уравнений в областях со сложной геометрией. Однако он требует более значительных вычислительных ресурсов. Авторы считают, что для данной задачи возможно использование модификации конечно-разностного метода, позволяющего для наиболее интересных случаев аппроксимировать дифференциальные уравнения не хуже метода конечных элементов, при этом сохраняя свою высокую экономичность.

2. Численное решение

Строится стандартная ортогональная сетка. Узлы для H располагаются в центре ячеек (типичный подход для шахматной сетки (рис. 2)). Русла рек аппроксимируются отрезками, проходящими по сторонам или по диагоналям ячеек. Таким образом, вид разностной сетки можно представить следующим образом.

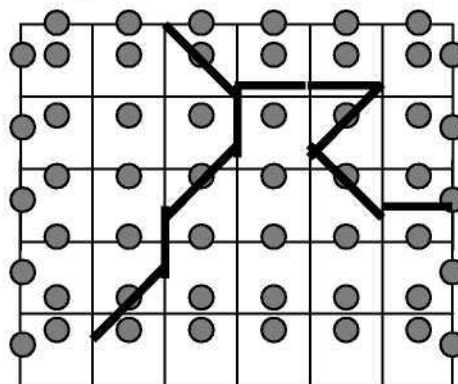


Рис. 2. Разностная сетка численного решения краевой задачи

Наиболее сложной частью является удачная реализация взаимодействия подземных и поверхностных вод, представляемая во многом граничным условием:

$$T_n(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial n} = \alpha(z - H^\pm) \pm \alpha_0(H^- - H^+)$$

которое при упрощающем предположении $H^- = H^+$ вырождается в простую формулу:

$$z = H, \quad (6)$$

что вполне годится для достаточно больших рек (например, р. Оби).

Для решения задачи предлагается полунейный по времени метод, фактически являющийся вариантом метода расщепления по физическим процессам. На одном временном шаге последовательно определяются:

H – абсолютная отметка уровня подземных вод (уравнения (1), (3), (6)). При этом используются значения уровня воды в руслах рек и коэффициентов проводимости с предыдущего шага по времени. Разностный аналог уравнения (1) имеет вид:

$$\frac{H_{ij}^{k+1} - H_{ij}^k}{t^{k+1} - t^k} = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \left(T_{i+1/2, j}^k \frac{H_{i+1, j}^{k+1} - H_{i+1, j}^k}{x_{i+1} - x_i} - T_{i-1/2, j}^k \frac{H_{i-1, j}^{k+1} - H_{i-1, j}^k}{x_i - x_{i-1}} \right) + \frac{1}{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}} \left(T_{i, j+1/2}^k \frac{H_{i, j+1}^{k+1} - H_{i, j+1}^k}{y_{j+1} - y_j} - T_{i, j-1/2}^k \frac{H_{i, j-1}^{k+1} - H_{i, j-1}^k}{y_j - y_{j-1}} \right) + V(x_i, y_j, t^{k+1}), \quad (7)$$

где i, j, k – номера узлов сетки по направлениям x, y и t соответственно.

При наличии русла реки, проходящего по диагонали ячейки, уравнение (7) преобразуется в $H_{ij}^{k+1} = Z_i^k$. Здесь i – номер узла вдоль соответствующего русла реки.

При прохождении русла реки по одной из границ ячейки, соответственно, заменяется и разностный аналог производной на этой границе. Например, если русло реки

находится на границе $x = x_{i+1/2}$, то выраже-

$$\frac{H_{i+1, j}^{k+1} - H_{ij}^{k+1}}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{изменяется:} \quad \frac{Z_{i+1/2}^k - H_{ij}^{k+1}}{x_{i+1/2} - x_i}$$

ω – площадь сечения воды в реке (уравнения (2), (5)). Разностное уравнение принимает вид:

$$\frac{\omega_{i+1}^{k+1} - \omega_i^k}{t^{k+1} - t^k} = \frac{M_{i+1}^{k+1} \omega_{i+1}^{k+1} - M_i^{k+1} \omega_i^{k+1}}{s_{i+1} - s_i} + d_{i+1}^{k+1} \quad (8)$$

$$M = \frac{R^3}{n} \varphi \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)$$

Здесь

Разностные аналоги граничных условий для уравнений (7), (8) реализуются стандартными способами.

Для решения разностных уравнений используются итерационные методы.

Так, для нахождения H^{k+1} применяется блочный попеременно-треугольный метод (SSOR) [5]. Представим разностное уравнение (7) вместе с граничными условиями в операторном виде $AH=f$. Матрицу A представим в виде $A=D+L+U$, где D – трехдиагональная матрица, L – нижняя треугольная матрица без диагонали, ближайшей к главной, U – верхняя треугольная матрица без диагонали, ближайшей к главной. Схема блочного попеременно-треугольного метода имеет вид:

$$(D + \omega L) \frac{D^{-1}}{\omega} (D + \omega U) \frac{H_{m+1} - H_m}{\tau_m} = r_m, \quad (9)$$

где $m, \omega, \tau_m, r_m = f - AH_m$ – соответственно

номер итерации, коэффициент релаксации, итерационный шаг и невязка. Она сводится к последовательному решению уравнений:

$$(D + \omega L)V = r_m \quad (D + \omega U)w_m = \omega DV$$

$$H_{m+1} = H_m + \tau_{m+1} w_m$$

Первые два уравнения решаются методом прогонки для трехточечных уравнений.

Для определения итерационного шага применяется очень надежный метод минимальных невязок:

$$\tau_{m+1} = \frac{(Aw_m, r_m)}{(Aw_m, Aw_m)}$$

Для определения площади поперечного сечения воды в русле на каждом пространственном шаге проводятся итерации по нелинейным членам d и M .

Сходимость определяется по достижении абсолютного значения нормы невязки значения, меньшего заданного.

Описанные выше алгоритмы были реализованы в виде компьютерной программы.

3. Результаты тестовых расчетов

В качестве первоначальной проверки были проведены расчеты для случаев, в которых решением являются аналитические функции. Были заданы подходящие коэффициенты граничных условий и источниковые члены в уравнениях (1), (2). Численные вычисления показали близость аналитического и приближенного решений, а в случаях, когда решение являлось кусочно-линейной функцией (с разрывами производных H на руслах рек), погрешность являлась величиной того же порядка, что и ошибки округления.

Был также проведен расчет модельного варианта течения в прямом канале [1]. Результаты вычислений показали совпадение с данными [1]. Максимальная разница не превысила 0,1%.

Дополнительной сложностью задачи является наличие значительной разницы в характерных пространственных масштабах. Так, типичные линейные размеры рассматриваемой области составляют десятки или даже сотни километров. В то же время большие изменения в районе «точечных» источников (например, скважин) происходят на расстоянии до десятков метров. Необходимость одновременного учета всех процессов приводит либо к очень большой размерности матриц в уравнениях (9), либо к использованию сильно неравномерной сетки. Поэтому в качестве еще одного теста была выбрана задача течения большой реки с поворотом на 90° и одной скважиной, которая непрерывно откачивает воду. Расчеты проводились в пространственной области – квадрате со стороной 24 км. Шаг сетки по этой области менялся от 1 до 4096 м со

сгущением в районе скважины. Построенная сетка имеет размерность 32x32. Уровень воды в реке в начальный период был равным 100 м, а уровень подземных вод — 90 м. На рисунке 3 приводится простран-

ственное распределение уровня подземных вод через 1 месяц.

В то же время в районе скважины удалось получить достаточно детальную картину распределения уровня подземных вод (рис. 4).

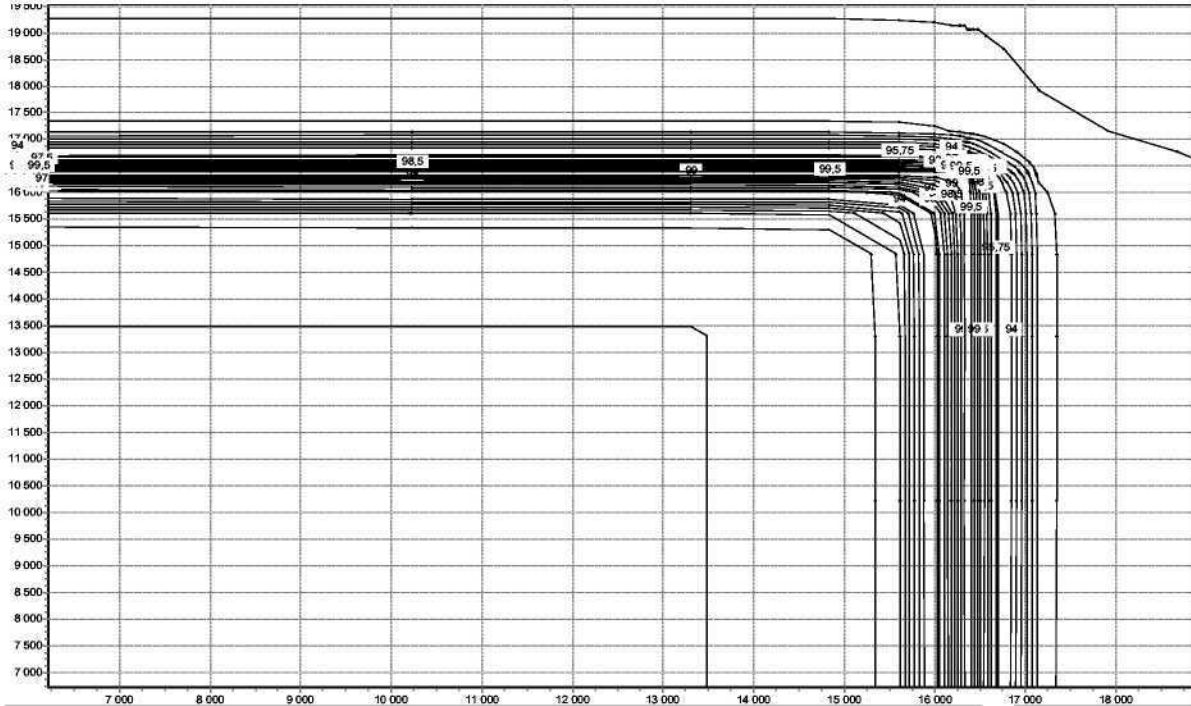


Рис. 3. Изолинии уровня подземных вод в расчетной области движения подземных и поверхностных вод

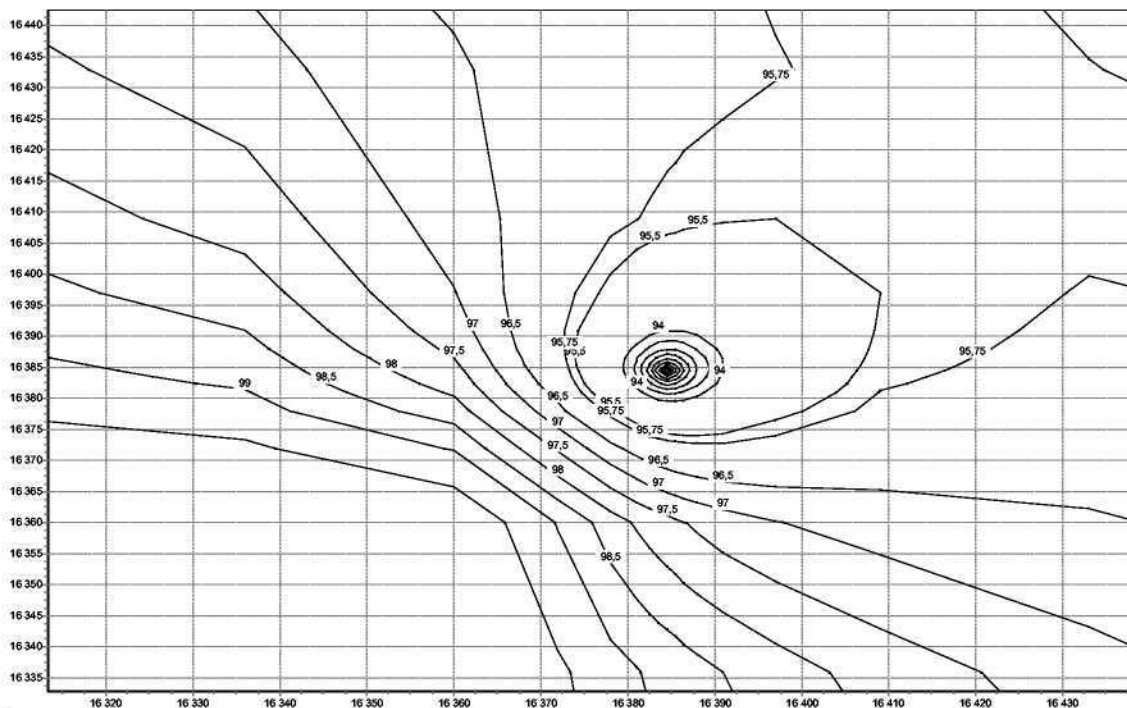


Рис. 4. Распределение уровня подземных вод в районе скважины

Отметим, что течение большой реки крайне слабо зависит от состояния подземных вод.

Таким образом, проверена работоспособность реализованного алгоритма для нахождения нестационарного движения подземных и поверхностных вод, в том числе и при достаточно сложной геометрической структуре задачи.

4. Вывод

В рамках системы поддержки принятия решений разработана компьютерная программа для моделирования совместного движения подземных и поверхностных вод в речном бассейне.

Библиографический список

1. Цхай А.А. Модель взаимодействия подземных и поверхностных вод для системы поддержки принятия решений / А.А. Цхай, К.Б. Кошелев, Н.Ю. Ким // Информационные системы в экономике, экологии и образовании. Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2002. С. 39-41.
2. Антонцев С.Н. Системное математическое моделирование процессов водообмена / С.Н. Антонцев, Г.П. Епихов, А.А. Кашеваров. Новосибирск: Наука, 1986. 215 с.
3. Зеегофер Ю.О. Постоянно действующие модели гидrolитосферы территорий городских агломераций (на примере Московской агломерации) / Ю.О. Зеегофер, А.Н. Клюквин, И.С. Пашковский, А.А. Рошаль. М.: Наука, 1990. 198 с.
4. Автоматизированные сеточные модели бассейнов подземных вод / Сост.: И.И. Крашин, Е.А. Полшков, Е.К. Орфаниди и др. / Всесоюзн. науч.-исслед. ин-т гидрогеологии и инженерной геологии. М.: Недраб, 1992. 176с.
5. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. М.: Наука, 1978. 591 с.

