ТЕХНОЛОГИИ И СРЕДСТВА МЕХАНИЗАЦИИ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

УДК 62-503.56.007.2

И.Я. Федоренко,
В.В. Садов

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АГРОИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ТРЕХ КРИТЕРИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Ключевые слова: *критерий, многокритериальная задача, оптимальность, принцип Парето, неопределенность.*

Введение

В инженерной практике приходится иметь дело с объектами, системами или задачами, характеризующимися несколькими критериями оптимальности. Как минимум, нужно учитывать три критерия: 1) критерий, обусловленный качеством работы технического объекта (более узко: качество выполнения технологического процесса); 2) критерий, показывающий экономное расходование энергии или топлива (удельный расход энергии, КПД и т.д.); 3) критерий эксплуатационной производительности или пропускной способности (косвенно отражает ряд других показателей, таких как материалоемкость, наработка на отказ, коэффициент готовности и т.д.).

Выбор критериев оптимальности представляет собой самостоятельную далеко не формальную процедуру, зависящую от характера решаемой задачи и пристрастий лица, принимающего решения (ЛПР).

Объекты и методы

Сложность многокритериальных задач состоит в том, что критерии разнородны (т.е. измеряются в различных единицах, бывают даже качественными), частные оптимумы у них не совпадают друг с другом. И самое главное, критерии обычно противоречивы. Это означает, что одни критерии необходимо обратить в максимум, другие – в минимум, а это в принципе невозможно сделать с позиций классической математики.

При проектировании самой простой детали машины уже возникает противоречие: деталь необходимо сделать как можно прочней, и в то же время затратить как можно меньше материала. Прочность и вес детали все время «воюют» между собой.

Смысл решения многокритериальных задач как раз и состоит в том, чтобы найти определенный компромисс между критериями с тем, что «волки будут сыты и овцы целы».

Многокритериальные задачи иногда называют задачами выбора или принятия решений, подчеркивая тем самым, что последнее слово остается не за математикой, а за ЛПР – лицом, принимающим решение. Дело в том, что при многих критериях возникает неопределенность целей, задача оптимизации становится размытой, неоднозначной. Математика однозначно и до конца разрешить ее не может, хотя и существенно помогает в этом.

Но нет правил без исключения: как далее будет показано, при трех противоречивых критериях оптимальности возможно более или менее строгое решение компромиссной задачи.

Анализируя многокритериальную инженерную задачу, сначала пытаются свести ее к классической однокритериальной, т.е. свернуть частные критерии в один комплексный [1-4]. Предложено множество методов для проведения этой процедуры, но с позиции математики и логики эти методы, чаще всего, не выдерживают никакой критики. Да и произвести такую свертку критериев не всегда удается. Поэтому самый правильный подход – решать задачу в первоначальном многокритериальном виде.

Отбросить заведомо неприемлемые варианты помогает принцип, предложенный в 1904 г. итальянским экономистом В. Парето. Согласно этому принципу, возможные решения многокритериальных задач следует искать среди неулучшаемых вариантов (альтернатив), т.е. вариантов, улучшение которых по одним критериям приводит к ухудшению по другим критериям.

Проиллюстрируем это на примере двух критериев. На рисунке 1 область D изображает те значения критериев оптимизации W_1 и W_2, которые соответствуют переменной x.

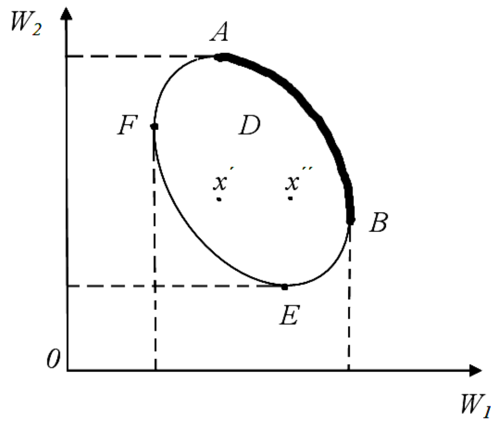

Рис. 1. Множество Парето при выпуклой области D допустимых значений x

Кривая, ограничивающая допустимую область D, является, таким образом, параметрически заданной.

Пусть оба критерия W_1 и W_2 нужно обратить в максимум, т.е.

$$W_1(x) \to \max \quad x \in D, \tag{1}$$

$$W_2(x) \to \max \quad x \in D. \tag{2}$$

Возьмем точку x' внутри области D (рис. 1). Тогда любая точка x'', располагающаяся правее, будет лучше по критерию W_1 при том же критерии W_2. Значит, эту точку можно улучшить. И она уже не может называться оптимальной в смысле Парето. Перебрав много точек в области D, мы придем к выводу, что принципу Парето отвечают лишь решения x, лежащие на дуге AB, представляющей северо-восточную границу области D. Если бы мы искали минимумы по критериям W_1 и W_2, то множеством Парето была кривая EF.

При разнородных критериях, когда один из них нужно обратить в максимум, а другой – в минимум (или наоборот), множествами Парето являются кривые AF и BE.

Таким образом, принцип Парето не позволяет выделить единственное оптимальное решение. Он помогает лишь сузить класс возможных решений и исключить из рассмотрения заведомо неприемлемые варианты. Окончательный вариант выбирается на основе дополнительной информации и квалификации ЛПР, т.е. с привлечением неформальных процедур. При таком подходе выделение эффективных точек Парето является как бы первым этапом задачи выбора и принятия решения.

Множество D носит название множества достижимости, или множества предельных возможностей. Множество Парето, которое еще называют областью компромиссов или фронтом Парето, представляет в общем случае лишь часть границы множества достижимости.

Несмотря на простоту принципа Парето, он играет одно из основных фундаментальных понятий в теории многокритериальных задач. Понятие оптимального по Парето, или эффективного решения, представляет собой обобщение понятия точки экстремума числовой функции на случай нескольких функций-критериев оптимальности. Принцип Парето является единственным строго обоснованным математическим методом решения многокритериальных задач [1].

Метод имеет и существенный недостаток. В ряде случаев множество Парето столь велико, что выбор единственного варианта опять не представляется возможным.

Для иллюстрации последнего тезиса рассмотрим задачу о выборе рабочей скорости v машинно-тракторного агрегата (МТА) для обработки почвы. Имеем два критерия оптимальности: $R(v)$ – сопротивление агрегата, которое нужно обратить в минимум, и $Q(v)$ – производительность агрегата, которую необходимо обратить в максимум:

$$R(v) \to \min; \tag{3}$$

$$Q(v) \to \max. \tag{4}$$

Для R и Q имеем простые формулы:

$$R = a_1 + b_1 v^2 \text{ (формула В.П. Горячкина);} \tag{5}$$

$$Q = \eta b_2' v = b_2 v \,, \tag{6}$$

где a_1, b_1, b_2 – эмпирические коэффициенты;

η – коэффициент использования рабочего времени смены;

b_2' – ширина захвата агрегата.

Физический смысл эти зависимости имеют при $v>0$, поэтому их графики располагаются в первом квадранте (рис. 2).

Исключая из выражения (5) и (6) скорость v, получим множество достижимости:

$$R = a_1 + \frac{b_1}{b_2^2} Q^2 . \tag{7}$$

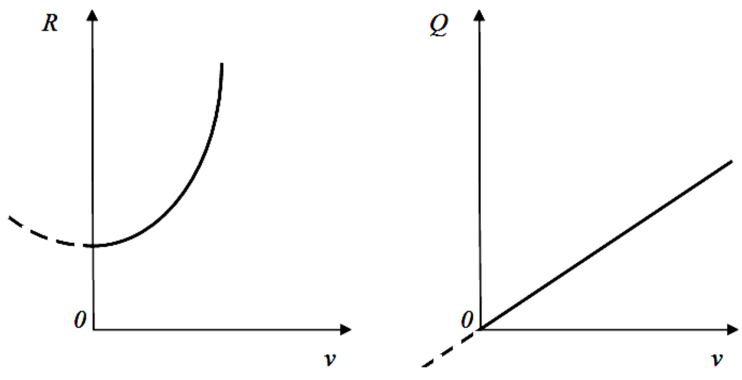

Рис. 2. Зависимости сопротивления с.-х. почвообрабатывающей машины (а) и производительности МТА (б) от скорости

Оно представляет собой правую ветвь параболы, обращенную вверх (рис. 3).

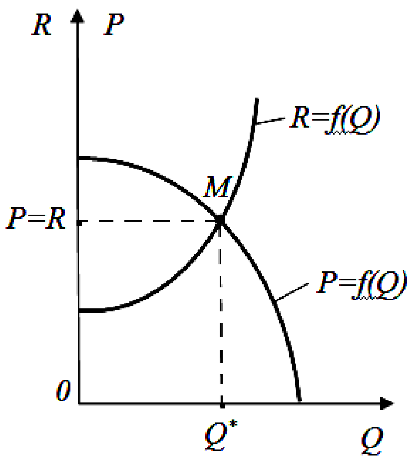

Рис. 3. К построению множества Парето

Нетрудно установить, что в данном случае множество достижимости и множество Парето совпадают. А это означает, что оптимальных по Парето точек бесчисленное множество, поскольку график $R = f(Q)$ уходит вправо вверх в бесконечность. Таким образом, построение множества Парето для критериев *{R-Q}* практически ничего не прояснило. Нужно изыскивать какие-то способы сужения множества Парето.

С этой целью привлечем еще один критерий оптимальности – тяговое усилие трактора (усилие на крюке) *P*. Оно также зависит от скорости МТА и в простейшем виде может быть аппроксимировано участком параболы:

$$P = a_3 - b_3 v^2. \tag{8}$$

Для повышения тягового КПД трактора необходимо, чтобы

$$P \to \max . \tag{9}$$

Построим еще одно множество достижимости в координатах *P-Q*:

$$P = a_3 - \frac{b_3}{b_2^2} Q^2. \tag{10}$$

Опять же можно констатировать, что множество достижимости совпадает с множеством Парето.

Поскольку размерности *R* и *P* совпадают, совместим это множество с ранее построенным множеством *{R-Q}* (рис. 3). Пересечение множеств дает точку *M*, лежащую на обеих множествах одновременно. Очевидно, что точка *M* дает решение нашей задачи: оптимальную производительность *Q**, а с ней и оптимальную рабочую скорость *v**. Значение *v**, учитывая, что в точке *M* *P* = *R*, можно подсчитать и аналитически:

$$v_* = \sqrt{\frac{a_3 - a_1}{b_1 + b_2}}. \tag{11}$$

Таким образом, мы пришли к известному условию совместной работы трактора и почвообрабатывающей машины:

$$P = R. \tag{12}$$

Обычно это условие постулируется, а из него находится значение рабочей скорости. Данное рассмотрение с помощью множеств Парето и привлечением трех критериев оптимальности существенно повышает достоверность известного подхода.

Однако вернемся к обсуждению проблем принципа Парето. Из рассмотренного примера следует, что, при двух критериях оптимальности задача была не решена, а при трех критериях получила одно единственное решение, совпадающие с известным. Если попытаться ввести еще один, четвертый, критерий, то задача опять становится неопределенной. Таким образом, при трех критериях задача многокритериальной оптимизации решается строго математически в рамках принципа Парето, при этом возможно графическое (визуализированное) сопровождение решения, что страхует от логических ошибок.

Продолжим обсуждение нашей проблемы еще на одном примере. Пусть нам необходимо обосновать время, потребное для смешивания кормовой смеси в смесителе периодического действия. При этом необходимо учесть три критерия оптимальности: θ – коэффициент однородности смеси; A – затраты энергии за период смешивания; Q – производительность смесителя.

Математические данные задачи формируются следующим образом:

$$\theta = 1 - \theta_0 e^{-\alpha t} \rightarrow \max; \quad (13)$$

$$A = Nt \rightarrow \min; \quad (14)$$

$$Q = \frac{M}{t} \rightarrow \max; \quad (15)$$

$$t>0,\ \alpha > 0,\ N>0,\ M>0,$$

где θ_0 – начальный коэффициент однородности смеси;

α – эмпирический коэффициент, характеризующий интенсивность смешивания;

N – мощность установленного на смеситель электродвигателя;

M – однократная загрузка смесителя.

Заметим, что оптимума нет ни по одному частному критерию оптимальности, т.е. задача оптимизации не имела бы места при рассмотрении любого из показателей в качестве единственного критерия оптимальности.

Прежде чем образовать два множества Парето, приведем критерий Q к безразмерному виду, поскольку коэффициент однородности смеси носит также безразмерный вид. Для этого разделим левую и правую части выражения (15) на Q_n – паспортную производительность смесителя.

Обозначая $q = Q/Q_n$, многокритериальную задачу оптимизации перепишем в виде:

$$\theta = 1 - \theta_0 e^{-\alpha t} \rightarrow \max;$$

$$A = Nt \rightarrow \min; ;$$

$$q = \frac{M}{Q_n} \cdot \frac{1}{t} \rightarrow max; ;$$

$$t>0,\ \alpha > 0,\ N>0,\ M>0,\ Q_n>0.$$

Образуем два множества достижимости $\{\theta\text{-}A\}$ и $\{q\text{-}A\}$:

$$\theta = 1 - \theta_0 e^{-(\alpha/N)A};$$

$$q = \frac{MN}{Q_n} \cdot \frac{1}{A}.$$

Как и в первом примере, данные множества являются одновременно и множествами Парето.

Совместив их на одном графике, видим, что точка M пересечения кривых существует (рис. 4).

Оптимальную величину A_* (следовательно, и оптимальное время смешивания t_*) можно найти из условия $\theta = q$, т.е. из уравнения:

$$\theta_0 e^{-(\alpha/N)N} + \frac{MN}{Q_n} \cdot \frac{1}{A} - 1 = 0. \quad (16)$$

Это уравнение является нелинейным и может быть решено одним из численных методов.

В перечисленных примерах было только одно переменное и множество Парето в виде кривых. Это и предопределено более или менее легкое решение многокритериальных задач.

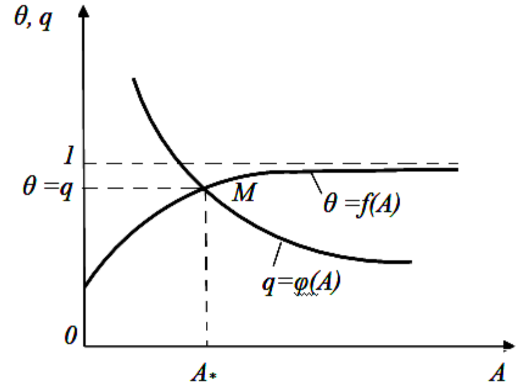

Рис. 4. Совмещенный график двух множеств Парето в задаче о времени работы смесителя

В более общем случае множество достижимости не совпадает с множеством Парето (рис. 1) и представляет собой при двух критериях плоскую замкнутую фигуру. Возможное пересечение этих множеств при трех критериях, которые необходимо обратить в максимум, показано на рисунке 5.

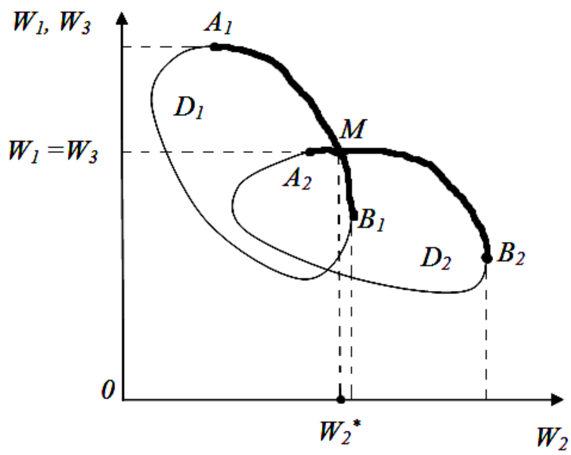

Рис. 5. Пересечение двух множеств Парето при трех критериях оптимальности

Критерии W_1 и W_3 должны быть каким-то образом приведены к безразмерному виду. Поскольку все три критерия необходимо обратить в максимум, то области Парето представляют собой северо-восточные границы соответствующих множеств достижимости. Пересечение множеств Парето кривых A_1B_1 и A_2B_2 дает общую точку M. Она определяет собой оптимальное значение W_2^*. Вкупе с условием $W_1 = W_3$ отыскиваются другие необходимые значения параметров данной задачи.

Условием успешного применения данного приема состоит в том, чтобы каждая пара критериев должна быть независимой по предпочтению от оставшегося критерия [4]. Это означает, что каково бы не было значение оставшегося критерия, соотношения «полезности» двух других не изменяется.

Выводы

1. Многокритериальный выбор при решении технических задач позволяет учесть противоречивые требования, возникающие при их решении. Среди методов многокритериальной оптимизации важнейшую роль играет принцип Парето. Его применение является первым этапом при принятии многокритериальных инженерных решений. Вторым этапом является отыскание подходов, способствующих сужению множества Парето.

2. Рассмотрен частный случай применения принципа Парето в технических задачах при трех критериях оптимальности. Показано, что при определенных условиях возможно рассматривать пересечение построенных попарно множеств Парето как единственную оптимальную точку. Данный подход продемонстрирован на двух примерах. В первом из них успешно решена тестовая задача.

Библиографический список

1. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений: учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
2. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2004. – 176 с.
3. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

УДК 629.463

С.В. Щитов,
З.Ф. Кривуца

СНИЖЕНИЕ ЭНЕРГОЗАТРАТ НА ТРАНСПОРТНЫХ РАБОТАХ ЗА СЧЕТ ОПТИМИЗАЦИИ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Ключевые слова: *технология, транспорт, затраты энергии, эффективность, сельскохозяйственные культуры, расход топлива, транспортная работа, скорость движения, исследование.*

Введение

Важным направлением хозяйственной деятельности Амурской области является производство сельскохозяйственной продукции. При возделывании даже одинаковых сельскохозяйственных культур существуют различные технологии, которые наиболее приемлемы для каждого конкретного хозяйства. **Задача оптимизации** заключается в том, чтобы найти такое транспортно-технологическое обеспечение, которое позволило бы получить продукцию с наименьшими энергозатратами. Решение вышеуказанной задачи позволит найти оптимальное транспортно-технологическое обеспечение АПК.

Метод исследования

Аналитическое описание вышеуказанной задачи определяется следующей целевой функцией: