

Выводы

1. Разработана лабораторная исследовательская установка контроля свойств волокон, позволяющая установить функциональные зависимости от основных параметров волоконной массы.

2. Установлено, что:

- амплитуда акустического сигнала находится в нелинейной зависимости от количества волокон в направлении распространения и не зависит от объемной плотности волоконного образца;

- фаза акустического сигнала находится в линейной зависимости от количества волокон в направлении распространения и имеет нелинейную зависимость от объемной плотности волоконного образца;

- для определения свойств волоконных масс предпочтительнее выглядят фазовые методы контроля, при условии размещения контролируемого образца в фиксированный объем;

- так как параметры хлопковых волокон, трудами ЦНИХБИ (Центральный научно-исследовательский институт хлопчатобумажной промышленности), обеспечены метрологически, то сравнение полученных зависимостей для хлопковых и льняных волокон дает возможность метрологически

обеспечить параметры льняных и других сельскохозяйственных волокон.

Библиографический список

1. Костюков А.Ф. Модель регистрации признаков многослойной структуры с помощью акустических колебаний // Вестник АГАУ. – 2010. – № 3. – С. 94-98.

2. Костюков А.Ф. Исследование влияния упорядоченного множества волокон на волновые соотношения ультразвука // Вестник АГАУ. – 2011. – № 5. – С. 90-94.

3. Способ лабораторного контроля параметров волокон. Патент № 2398224, G01N29/00, 2009 г. Российская Федерация, МПК G01N29/00; заявитель и патентообладатель А.Ф. Костюков. – № 2009122763/28; заявл. 15.06.2009 г.

4. Костюков А.Ф. Приборы и методы лабораторного контроля основных технологических параметров сельскохозяйственных волокон с помощью ультразвука // Вестник АГАУ. – 2011. – № 3. – С. 95-98.

5. Способ контроля средних параметров компактного множества волокон. Патент № 2380697, G01N29/00, Российская Федерация, МПК G01N29/00; заявитель и патентообладатель А.Ф. Костюков. – № 2008145339/28, заявл. 17.11.2008 г.



УДК 519.233.5:519.863

И.Я. Федоренко,
В.В. Садов

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ РЕГРЕССИИ

Ключевые слова: численный метод, множество Парето, уравнение регрессии, оптимизация.

Введение

Реальные инженерные задачи являются многокритериальными (несколько противоречивых критериев оптимальности) и многомерными (т.е. содержат множество параметров оптимизации – факторов). Наиболее обоснованным решением многокритериальных задач является построение соответствующего множества Парето. Множество Парето – это лучшее решение, которое математика может предложить в данное время для многокритериальных задач. Однако при сложной зависимости частных критериев оптимальности от нескольких переменных (факторов) аналитическое по-

строение множества Парето чаще всего невозможно. Остается численный путь.

Рассматривается методика построения множества Парето при наличии уравнений регрессии, полученных эмпирически с помощью методики планирования эксперимента (активного эксперимента).

Применение методики планирования эксперимента и получение уравнений регрессии для каждого уравнения оптимальности широко распространились в агроинженерной практике. Почти в каждой диссертационной работе по номенклатуре специальностей 05.20.00 «Процессы и машины агроинженерных систем» имеются такие уравнения регрессии.

Однако когда дело доходит до решения многокритериальной задачи, используя эти уравнения регрессии, то чаще всего принимаются необоснованные решения. Поэтому

построение множества Парето является необходимым первым этапом выбора рационального инженерного решения. Вторым этапом обычно является сужение множества Парето на основе дополнительной информации.

Математическая формализация задачи.

Статистические методы планирования эксперимента и получения математического описания инженерных объектов основаны на том, что связь критерия оптимальности W и независимых управляемых нормированных входных переменных (факторов) можно представить в виде некоторого полинома (отрезка ряда Тейлора), в который разлагается неизвестная зависимость в окрестности основной точки x_{io} [1]. Разложение функций будет иметь вид:

$$W_l(x_i) = \beta_0^l + \sum_{i=1}^n \beta_i^l x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii}^l x_i^2 + \sum_{i \neq j} \beta_{ij}^l x_i x_j + \dots, \quad (1)$$

где $l = \overline{1, L}$ – номер критерия оптимальности;

$i = \overline{1, n}$ – номер независимого переменного (фактора);

$$\beta_i = \frac{\partial W_l}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x} = \bar{x}_0}; \quad \beta_{ij} = \frac{\partial^2 W_l}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\bar{x} = \bar{x}_0};$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_l}{\partial x_i^2} \Big|_{\bar{x} = \bar{x}_0} - \text{частные производные,}$$

являющиеся теоретическими коэффициентами полинома.

Приближенная, вследствие действия неуправляемых и неконтролируемых факторов, зависимость $W(x_i)$ от факторов x_1, x_2, \dots, x_n отыскивается по результатам эксперимента и представляется в виде уравнения регрессии. Если в задаче применяются два критерия оптимальности, то уравнение регрессии для них можно представить в виде (ограничиваясь полиномами второй степени):

$$\hat{W}_1 = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i x_i + \sum_{i=1}^n \hat{a}_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} \hat{a}_{ij} x_i x_j; \quad (2)$$

$$\hat{W}_2 = \hat{b}_0 + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i x_i + \sum_{i=1}^n \hat{b}_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} \hat{b}_{ij} x_i x_j, \quad (3)$$

где $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots$ – выборочные коэффициенты регрессии, являющиеся оценками соответствующих теоретическими коэффициентов.

Пусть критерии \hat{W}_1 и \hat{W}_2 нужно обратить в максимум. Если реально задача решается

на минимум, то ее можно обратить в задачу на максимум, поменяв знаки во всех членах функции цели. Пусть далее нам нужно построить множество Парето для критериев \overline{W}_1 и \overline{W}_2 .

Методы решения задачи. Академик Н.Н. Моисеев в своей известной книге приводит два метода численного построения множества Парето [2]. Согласно одному из этих методов нужно последовательно решить ряд задач математического программирования. Следуя этой схеме и переходя к нормированным (безразмерным) критериям f_1 и f_2

$$\begin{aligned} \hat{W}_1(x_1, x_2 \dots x_n) &\rightarrow f_1(\bar{x}); \\ \hat{W}_2(x_1, x_2 \dots x_n) &\rightarrow f_2(\bar{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

запишем две оптимизационные задачи

$$f_1(\bar{x}) \rightarrow \max; \quad f_2(\bar{x}) \rightarrow \max.$$

Нормирование критериев обусловлено, в общем случае, их разнородностью и может быть проведено различными путями. В простейшем случае оно осуществляется делением левой и правой частей выражений (2) и (3) на соответствующие максимальные значения \hat{W}_1 и \hat{W}_2 . Следовательно, уравнения регрессии мы должны переписать в виде

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \\ &+ \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_2(\bar{x}) &= b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \\ &+ \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j. \end{aligned} \quad (6)$$

Для аппроксимации множества Парето введем два положительных числа λ и μ , таких, что

$$\lambda + \mu = 1. \quad (7)$$

Далее составим новый критерий

$$f = \lambda f_1(\bar{x}) + \mu f_2(\bar{x}) \rightarrow \max. \quad (8)$$

Оказывается, что решение этой задачи определяет такой вектор \bar{x}^* , что точка

$$f_{1*} = f_1(\bar{x}^*), \quad f_{2*} = f_2(\bar{x}^*) \quad (9)$$

принадлежит множеству Парето.

Линейная функция $f_1(\bar{x})$ от частных критериев является правомерной в том случае,

если множество Парето выпукло. При положительных λ и μ решение задачи максимизации данной функции принадлежит множеству Парето [3]. Поэтому аппроксимацию множества Парето осуществляем следующим образом. Решаем задачу

$$\lambda_A f_1(\bar{x}) + \mu_A f_2(\bar{x}) \rightarrow \max, \quad (10)$$

где λ_A и μ_A удовлетворяют условию (7).

Решение задачи (10) дает некоторый вектор \bar{x}_A , который в плоскости f определит точку A с координатами

$$f_1 = f_1(\bar{x}_A); f_2 = f_2(\bar{x}_A). \quad (11)$$

Точно также, задаваясь новой парой λ и μ , мы определим точку B . Проводя через точки A и B прямую, получим простейшую аппроксимацию множества Парето (рис. 1).

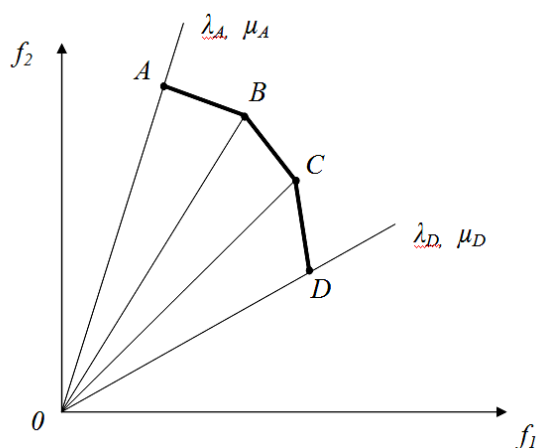


Рис. 1. Аппроксимация множества Парето ломаной кривой

Таким же образом получаем точки C, D и т.д. Ломанная кривая $ABCD\dots$ и будет приближением множества Парето. Обычно достаточно 8-9 точек, чтобы решать задачу с удовлетворительной для инженерных расчетов точностью. Это означает, что мы должны задать значения λ от 0,1 и с шагом тоже 0,1, т.е.

$$\lambda = 0,1; 0,2\dots,0,9.$$

Поскольку исходные модели (5) и (6) характеризуются непрерывными выпуклыми функциями, то множество Парето будет иметь такой же характер.

Увеличив количество точек, можно построить ломаную, аппроксимирующую это множество с любой степенью точности. Поэтому проблем с аппроксимацией множества Парето обычно не возникает.

Нахождение экстремума-максимума оптимизационной задачи (8) проводится методами многомерной оптимизации.

Необходимое условие экстремума функции многих переменных заключается в

том, что градиент функции $f(x)$ в критической точке $x_* = (x_{1*}, \dots, x_{n*})$ равен нулю, т.е.

$$\nabla f(x_*) = 0 \quad (12)$$

или

$$\frac{\partial f(x_*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Таким образом, если функция имеет точки экстремума, то они находятся среди критических точек. Обратное утверждение неверно, т.е. если точка является критической, отсюда не следует, что она обязательно является точкой экстремума.

В основе определения типа экстремума лежит анализ матрицы Гессе. Напомним, что матрицей Гессе $H(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ называется матрица частных производных второго порядка, вычислительных в данной точке:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{2n} \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{nn} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $h_{ii} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}$, $h_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Прежде чем вводить достаточные условия экстремума, рассмотрим определитель матрицы Гессе $H(x_*)$, вычисленный в критической точке

$$\det H(x) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{2n} \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{nn} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Определители $\Delta_1 = h_{11}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{2n} \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{nn} \end{vmatrix}$$

называются угловыми минорами.

Достаточные условия экстремума (критерий Сильвестра):

1. Для того чтобы матрица Гессе $H(x_*)$ была положительно определенной ($H(x_*) > 0$) и точка x_* являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров были строго положительны:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0; \quad (16)$$

2. Для того чтобы матрица Гессе $H(x_*)$ была отрицательно определенной ($H(x_*) < 0$) и точка x_* являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с отрицательного:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0. \quad (17)$$

Если условия (16) и (17) не выполняются, то требуется дополнительное исследование. В частности, отсутствие максимума или минимума может быть связано с наличием «седловой» точки – максимума.

В этом случае по одной переменной имеется максимум, по другой – минимум, а сама седловая точка не является экстремальной.

Таким образом, в нашем случае, при полиномах второй степени критические точки находятся из уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda(\alpha_i + 2\alpha_{ii}x_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j) + \\ + \mu(b_i + 2b_{ii}x_i + \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Решая систему из n линейных уравнений по числу n факторов, получаем n координат оптимальной точки в относительных единицах. Не следует забывать, что у нас нормированы не только критерии оптимальности, но и переменные x_i . Такое нормированное (кодирование) переменных проводят до начала эксперимента. Начало координат в этом случае располагается в центре эксперимента.

Вторые частные и смешанные производные будут иметь вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2\lambda\alpha_{ii} + 2\mu b_{ii}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} + \mu \sum_{j=1}^n b_{ij}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 2\lambda a_{ii} + 2\mu b_{ii}. \quad (21)$$

Демонстрацию изложенного метода проведем на примере. Возьмем два уравнения регрессии в кодированном виде [4]:

удельные затраты энергии для получения кормовых брикетов:

$$A = 40,48 - 0,76x_1 - 0,83x_2 + 3,51x_3 - 0,44x_{12} + 0,4x_{23} + 0,408x_{13} + 1,23x_{11} + 1,37x_{22} + 3,38x_{33}; \quad (22)$$

крошимость брикетов

$$K = 9,98 + 1,54x_1 - 4,06x_2 - 3,5x_3 - 1,5x_{12} - 0,34x_{23} - 0,34x_{13} + 2x_{11} + 1,6x_{22} - 0,13x_{33}, \quad (23)$$

где x_1 – влажность материала;

x_2 – соотношение величины резки к ширине камеры прессования;

x_3 – линейная скорость движения лопатки.

Продифференцировав уравнения регрессии (22) и (23) с учетом чисел λ и μ , получим три уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -0,76\lambda - 0,44x_2\lambda + 0,4x_3\lambda + \dots - \\ - 0,31x_1\mu + 4\mu; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} = -0,83\lambda - 0,44x_1\lambda + 0,4x_3\lambda + \dots - \\ - 0,34x_1\mu + 3,2x_2\mu; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_3} = 3,5\lambda + 0,4x_1\lambda + 0,4x_2\lambda + \dots - \\ - 0,34x_1\mu - 0,26x_3\mu. \end{aligned}$$

Имея три уравнения с тремя неизвестными, составляем определитель системы. По полученным коэффициентам с помощью программы MS Excel были определены значения исследуемых параметров оптимизации (табл.).

Отбросим результаты при $\lambda = 0,1$ и $\lambda = 0,9$. В этих случаях крошимость имеет отрицательное значение. Остальные данные дадут зависимость (рис. 2).

Таблица

Результаты численного метода

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
K, %	-6,41	4,084	4,109	5,08	5,78	6,85	7,59	8,43	-3,74
A, кДж/кг	74	40,202	40,104	39,41	39,15	39,11	39,18	39,34	66,56

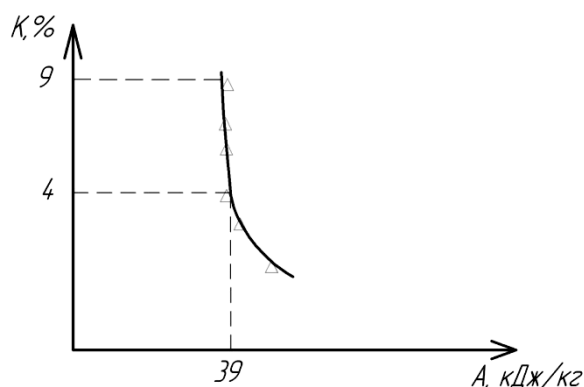


Рис. 2. Зависимость крошимости K от удельных затрат энергии на прессование A

Из рисунка видно, что при удельных затратах на прессование, меньших 39 кДж/кг, наступает резкое увеличение крошимости брикетов. Это обусловлено их малой плотностью. Согласно исследованиям Ю.В. Подколызина [5] уменьшение плотности брикетов ниже 800 кг/м^3 приводит к резкой снижении прочности. Таким образом, на основе анализа характера множества Парето (рис. 2) можно рекомендовать рациональный режим брикетного пресса с $A_{\text{уд}} = 39\text{-}40$ кДж/кг и $K = 4\text{-}5\%$.

Выводы

1. Большинство инженерных задач являются многокритериальными. Одним из воз-

можных способов оптимизации этих задач является применение принципа Парето. Однако при сложных зависимостях частных критериев применение принципа Парето затруднительно. В этом случае возможно применение численного метода.

2. Рассмотрен пример оптимизации двух уравнений регрессии при помощи численного метода, и на этой основе построено множество Парето. С учетом дополнительной информации были определены рациональные режимы работы устройства.

Библиографический список

1. Бородюк В.П. и др. Статистические методы в инженерных исследованиях: уч. пособие. — М.: Высш. шк., 1983. — 216 с.
2. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1981. — 488 с.
3. Дангул А.Н., Полуян Л.Я. Разработка САПР. В 10 кн. Кн. 2. Системно-технические задачи создания САПР: практ. пособие. — М.: Высшая школа, 1990. — 144 с.
4. Наумов И.А. Обоснование конструктивно-кинематических параметров пресса для получения кормовых брикетов: дис. ... канд. тех. наук. — Барнаул, 2008.
5. Мельников С.В. Механизация и автоматизация животноводческих ферм. — Л.: Колос, 1978. — 560 с.

