4. Burkin I.A. Fiziologicheskaya rol' i sel'skokhozyaistvennoe znachenie molibdena. — M.: Nauka, 1968. — 293 s.

5. Kolosov I.I. Poglotitel'naya deyatel'nost' kornevykh sistem rastenii. — M.: AN SSSR, 1963. — S. 10.

6. Kovalevskii A.L. O fiziologicheskikh bar'erakh pogloshcheniya khimicheskikh elementov rasteniyami — mikroelementy v biosfere i primenenie ikh v sel'skom khozyaistve i meditsine Sibiri i dal'nego Vostoka. — Ulan-Ude,1971. — S. 134-144.

7. Tkachenko T.N. Povedenie i vzaimodeistvie mikroelementov v sisteme: pochva — rastenie na territorii Priobskogo plato Altaiskogo kraya. — Avtoref. kand. diss. — Barnaul, 2000. — 18 s.

УДК 631.4

Фариз Микайылов
Fariz D. Mikailsoy

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОЧВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

MODELLING OF SOME SOIL PROCESSES

Ключевые слова: *классификация моделей, эмпирические, полуэмпирические и теоретические модели, математическое моделирование, теплоперенос в почве, перенос солей в почве.*

Новое научное направление — почвенная математика появилось в дополнение к классической науке для исследований почвенных физических и биохимических процессов и их взаимодействия. В прошлом математика использовалась в почвоведении только в вероятностных гипотезах и статистических методах. В настоящее время, благодаря прогрессу технологий и повышению потребности в продуктах питания, некоторые направления математики, такие как численный анализ, дифференциальные уравнения крайне необходимы для решения различных задач в современном почвоведении. Несмотря на то, что в прошлом математика применялась только для оценки эмпирических данных, вероятностных подходов и статистических процедур в почвоведении, математическое моделирование на сегодняшний день представляет собой огромный интерес. Цель математического моделирования в почвоведении — определить новые направления в развитии почвоведении. Разработка математической модели важна не только для почвоведения, но также и для исследований процессов глобальной биосферы. Математическое моделирование почвенных процессов — это новое явление в научном исследовании. Оно развивается с 1950 г. благодаря прогрессу компьютерных технологий и моделированию комплексных динамических систем (системный анализ). Несмотря на то, что почва, объект моделирования, является сложной системой, математическое моделирование почвенных процессов быстро развивается. Цель этого исследования — проанализировать современные подходы математического моделирования, используемые в некоторых почвенных процессах, продемонстрировать применение разработанных нами моделей.

Keywords: *classification of models, empirical, semi empirical and theoretical models, mathematical modeling, heat processes in soil, salt transfer in soil.*

In addition to recent other classical science, to investigate physical and biochemical processes and their interactions, new scientific interest, soil mathematics, has been developed. In previous, mathematics used to apply in soil science for only possibility hypothesis and statistical methods. In present, due to the advances in technology and increase in food demands, some mathematical branches such as numeric analysis, differential equations is inevitable for solving various problems in modern soil science. In past, although mathematics was only performed for evaluation of empirical data, possibility approaches and applications of statistical procedures in soil science, nowadays mathematical modeling has great interest. The aim of mathematical modeling in soil science is to determine new developments in soil science advances. Developing mathematical model is not only important for soil science but also very important in investigations of global biosphere processes. Mathematical modeling of soil processes is a new research interest and has started since 1950 due to the advances in modern computer technologies and modeling of complex dynamics systems (system analysis). Although soil, object of modeling, is a complex system, recently mathematical modeling of soil processes has rapid advances. The aim of this research, therefore, is to analyze current mathematical modeling approaches used in processes of some soil processes to demonstrate the applications of our developed models.

МИКАЙЫЛОВ Фариз, д.с.-х.н., доцент, каф. почвоведения и питания растений, фак-т сельского хозяйства, Университет Сельчук, г. Конья, Турецкая республика. Тел.: +905059688288. E-mail: farizm@selcuk.edu.tr.

MIKAILSOY Fariz D., Assoc. Prof. Dr., Department of Soil Science and Plant Nutrition, Faculty of Agriculture, Selcuk University, Konya, Turkey. Ph.: +905059688288. E-mail: farizm@selcuk.edu.tr.

Введение

Сравнительно недавно начала бурно развиваться новая наука – математическое почвоведение, которая возникла на стыке нескольких классических наук: биология, химия, физика, математика и кибернетика. Для современного почвоведения характерна общая тенденция математизации научных исследований. Если раньше применение математики в почвоведении ограничивалось использованием методов теории вероятностей и математической статистики для обработки экспериментальных данных, то сейчас все больше внимания уделяется математическому моделированию. Б.Г. Розанов, характеризуя новый этап в развитии почвоведения, определяет моделирование почвенных процессов как новое научное направление. Разработка моделей почвенных процессов имеет больше значение не только в почвоведении, но и при изучении глобальных биосферных процессов [9]. Математическое моделирование почвенных процессов – относительно молодое научное направление, которое начало развиваться в начале 50-х годов с появлением мощных ЭВМ и разработкой методов моделирования сложных динамических систем – системного анализа. Несмотря на чрезвычайную сложность почвы как объекта моделирования, в последнее столетие это направление в почвоведении активно развивается. С развитием вычислительной техники появилась возможность наиболее эффективного использования традиционного для почвоведения системного подхода, так как системные исследования связаны с переработкой большого объема информации, анализом огромного числа вариантов, построением математических моделей.

Множество известных в настоящее время математических моделей в почвоведении можно разделить на три большие группы: *эмпирические, полуэмпирические и теоретические модели* [7-8, 11].

Цель исследования – провести анализ существующих подходов к математическому моделированию некоторых почвенных процессов.

1. Эмпирические модели. При построении моделей этой группы исследователь, имея определенное количество результатов наблюдений за свойством изучаемого объекта, зависящим от различных факторов внешней среды, получает с помощью метода – множественного регрессионного анализа – аналитическое выражение, связывающее изучаемое свойство почвы и определяющие его факторы окружающей среды. Математическая статистка изучает различные методы обработки и осмысления результатов многократно повторяемых случайных событий. Задачей математической статистики являются построение и оценка адекватности эмпирических моделей реальных процессов [2]. Для процесса построения и применения моделей характерно следующее обстоятельство: чем больше данных, тем точнее, адекватнее модель. В полной мере это относится к статистическим (эмпирическим) моделям. Одним из важных приложений методов математической статистики является установление зависимости между двумя или более наблюдаемыми величинами.

При построении эмпирических моделей применяют различные функции, включающие одну или несколько переменных. В общем случае все эмпирические (регрессионные) модели могут быть записаны в виде формулы:

$$\tilde{y} = f\left(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_m\right), \quad (1)$$

где $\tilde{y}-$ изучаемое свойство среды (зависимая переменная);

$x_i -$ факторы среды (независимая переменная);

α_j – коэффициенты эмпиричеких моделей (т.е. регрессии);

n – общее число анализируемых факторов.

Числовые значения параметров α_j в формулу (1) выбирают из условия наилучшего соответствия теоретических (вычисленных по формуле (1) и экспериментальных данных. При этом чем больше проведено наблюдений, тем больше избыточной информации, тем точнее сглаживание [3]. На практике почти всегда измеряемые величины y_i содержат случайные ошибки. Чтобы в какой-то мере сгладить влияние случайностей, эксперимент планируется так, чтобы массив экспериментальных данных был больше, чем число неизвестных параметров в модели (1).

Эмпирические модели почти всегда являются наиболее простыми функциональными моделями, позволяющими в лучшем случае решать задачу сглаживания экспериментальных данных, задачу аппроксимации. Кроме того, в коэффициентах формулы (1) отражается весь комплекс факторов, влияющих на изучаемое явление. К преимуществу эмпирических моделей можно отнести достаточно хорошие формальные компьютерные способы идентификации (перебора уравнений) различной структуры модели, а также по ним очень легко вести расчеты.

Недостатком этих моделей является невозможность учета в них причинно-следственных связей между переменными, учета экологических гипотез. Также в эмпирических моделях число входных показателей (x_i), отражающих действия факторов среды, обычно невелико, поэтому и точность этих моделей невелика. Другой, самый важный, недостаток состоит в том, что эмпирические модели не вскрывают механизма изучаемого явления, поэтому их нельзя применять в условиях, отличных от тех, в которых они были получены [7].

Эмпирические модели получили широкое распространение в почвоведении. Использование аппарата регрессионного анализа привело к решению ряда важных практических задач и одновременно выявило трудности и ограничения, присущие этой методологии. Очевидно, что ограничения, обусловленные спецификой почвы, нельзя преодолеть, оставаясь в рамках регрессионных схем.

Для того чтобы точнее можно было описать характер реакции системы на изменения окружающей среды, нужно учесть в модели как можно большее число влияющих на нее факторов окружающей среда. Но с ростом количества учитываемых факторов увеличиваются ошибки оценок коэффициентов уравнений регрессии при заданной выборке. Это противоречие принципиально ограничивает возможности регрессионного анализа как метода изучения такой сложной системы, как почва. Несмотря на это они могут использоваться для решения практических вопросов.

Выбор аналитического вида модели (1) производится на основании опыта предыдущих исследований, литературных источников, а также визуального наблюдения расположения точек $\left(x_i, y_i; i = \overline{1,k}\right)$. Наиболее часто встречаются следующие виды уравнений нелинейной регрессии: полиномиальное, гиперболическое, степенное, показательное, биномиальное, логарифмическое, тригонометрическое, логистическое и др.

После установления выбора аналитического вида f в модели (1) (этот важный этап моделирование называется *спецификацией модели*) следующим этапом моделирование является идентификация параметров $a_1, a_2, ..., a_m$. Она решается сравнительно просто, если зависимость (1) имеет вид степенного полинома. В других боле сложных нелинейных случаях прибегают к линеаризации модели. Классический подход к идентификации параметров полиномиальной модели осуществляется непосредственно методом наименьших квадратов (МНК).

Существует значительный класс моделей, подвергающийся линеаризации нелинейных переменных путем логарифмирования или других преобразований. В общем случае применяются численные методы решения задач на условный экстремум.

После определения коэффициентов $a_1, a_2 ,..., a_m$ естественно возникает задача оценки точности вычислений этих коэффициентов и выбранной модели, которые аппроксимировали зависимость (1).

Выбор структуры (линейность, нелинейность и др.) и оценка точности эмпирических моделей осуществляются по некоторому критерию. Обычно в качестве критерия используют минимум статистических показателей (корреляционное отношение, или индекс корреляции, η; средняя квадратическая погрешность, σ; средняя относительная ошибка аппроксимации, $\overline{\varepsilon}$, между экспериментальными и вычисленными по эмпирическим моделям теоретическими значениями).

В зависимости от количества факторов, включенных в уравнение регрессии (1), принято различать ***простую*** (парную) и ***множественную регрессии.***

Простая регрессия представляет собой регрессию между двумя $\tilde{y}$ и x. Часто используемые эмпирические модели приведены ниже:

Линейная: $\tilde{y} = a\,x + b.$

Параболическая: $\tilde{y} = a\,x^2 + b\,x + c.$

Полиномиальная: $\tilde{y} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$

Степенная: $\tilde{y} = ax^b.$

Показательная: $\tilde{y} = a\,b^{cx}.$

Биномиальная: $\tilde{y} = a\,x^b e^{-cx}.$

Гиперболическая: $\tilde{y} = \dfrac{a\,x}{b + x}.$

Логарифмическая: $\tilde{y} = a\ln x + b.$

Тригонометрическая:

$$\tilde{y} = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]. \quad (2)$$

Простая регрессия может дать хороший результат при моделировании, если влиянием других факторов, воздействующих на объект исследования, можно пренебречь. Однако когда уверенности в правомерности такого допущения нет, необходимо использовать модель с большим числом факторов.

Множественная регрессия, соответственно, представляет собой регрессию результативного признака с двумя и большим числом факторов, т.е. модель вида (1).

В исследовании связи урожая с агроклиматическими, почвенными и агротехническими факторами применяют различные виды функций, включающих одну или несколько переменных. Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель. Множественная регрессия широко используется в решении целого ряда вопросов.

Построение уравнения множественной регрессии начинается с решения вопроса о спецификации модели. Суть проблемы включает в себя два круга вопросов: отбор факторов и выбор вида уравнения регрессии. Ввиду четкой интерпретации параметров наиболее широко используются линейная, параболическая, показательная, степенная, показательно-степенная, иррациональная и т.д. Эти модели приведены ниже:

$$\tilde{y} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i,$$

$$\tilde{y} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

$$\tilde{y} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sqrt{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \sqrt{x_i x_j},$$

$$\tilde{y} = a_0\, x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\, x_3^{a_3} \cdots x_n^{a_n},$$

$$\tilde{y} = a_0\, e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n},$$

$$\tilde{y} = a_0\, x_1^{a_1}\, x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}\, e^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n}. \quad (3)$$

Параметры a_i при x_i в линейной множественной регрессии называются коэффициентами «чистой» регрессии. Они характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего параметра на единицу при неизменном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

При нелинейной зависимости признаков, приводимой к линейному виду, параметры множественной регрессии также определяются по МНК с той лишь разницей, что он используется не к исходной информации, а к преобразованным данным.

Так, рассматривая показательно-степенную функцию

$$\tilde{y} = a_0\, x_1^{a_1}\, x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}\, e^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n},$$

мы преобразовываем ее в линейный вид:

$$\lg \tilde{y} = \lg a_0 + a_1 \cdot \ln x_1 + a_2 \cdot \ln x_2 + \ldots + a_n \cdot \ln x_n + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_n \cdot x_n,$$

где переменные выражены в логарифмах.

Далее обработка МНК та же: строится система нормальных уравнений и определяются неизвестные параметры. Потенцируя значение $\ln\alpha_0$, находим параметр α_0 и, соответственно, общий вид уравнения степенной функции.

Вообще говоря, нелинейная регрессия по включенным переменным не таит каких-либо сложностей в оценке ее параметров. Эта оценка определяется как и в линейной регрессии МНК, так и в двухфакторном уравнении нелинейной регрессии: $\tilde{y} = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_1^2 + a_4 \cdot x_2^2$. Может быть проведена линеаризация введением в него новых переменных $x_3 = x_1^2, \quad x_4 = x_2^2$. В результате получается четырехфакторное уравнение линейной регрессии: $\tilde{y} = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + a_4 \cdot x_4$.

2. Полуэмпирические модели. Полуэмпирические модели отличаются от эмпирических тем, что строятся на основе формул, выражающих фундаментальные законы природы, которые справедливы, разумеется, и в почвах. Это может быть закон сохранения массы, закон сохранения энергии, термодинамические уравнения химических равновесий и др. [7]. Эти формулы дополняются эмпирическими моделями отдельных почвенных микропроцессов, и таким образом составляется «синтетическая» модель, описывающая изучаемые явления в целом. Но, как правило, на основе только балансовых отношений (законов сохранения) не удается построить замкнутую математическую модель сложной природной системы, так как недостаточно изучены механизмы многих происходящих в ней процессов, всегда остается неопределенным ряд величин. Для их определения приходится собирать эмпирическую информацию и обрабатывать ее методами математической статистики. Поэтому модели этой группы и получили название полуэмпирических.

Следует подчеркнуть, что аппарат математической статистики широко используется не только при построении эмпирических моделей, но и при разработке полуэмпирических моделей, особенно на этапе идентификации. По вопросам применения статистических методов в почвоведении есть специальные руководства [2].

Полуэмпирические модели широко используются в почвоведении. Их построение открывает возможность, исходя из поставленной цели, объединить наши знания о системе-оригинале в единое целое, перевести их на единый математический язык и использовать при решении различных задач.

3. Теоретические модели. Теоретические модели отличаются от эмпирических (регрессионных) прежде всего по объему априорной информации, необходимой для их построения. В эмпирических моделях исходная (теоретическая) информация используется только для того, чтобы выбрать факторы окружающей среды, воздействие которых на систему будет рассматриваться в модели. В основе теоретических моделей лежат наши представления о механизмах описываемых явлений [9]. Исходная теоретическая информация о характере рассматриваемых процессов позволяет более обоснованно выбрать класс функций для их описания.

Однако чрезвычайная сложность почв и недостаточная изученность механизмов многих почвенных процессов сдерживают развитие этой группы моделей. Теоретическое моделирование относится к исследованиям фундаментального характера.

Достоинством полуэмпирических и теоретических моделей является неизменность исходной формулы, выражающей закон сохранения. Другим преимуществом оказывается возможность рассчитать детальное распределение показателя протекания изучаемого процесса во времени и по глубине.

Слабым местом полуэмпирических и теоретических моделей является отсутствие гарантии того, что в модель включены описания действительно всех почвенных процессов, существенных при протекании рассматриваемого явления [7].

Мы познакомились с различными подходами к моделированию почвенных процессов, перейдем теперь к рассмотрению математических моделей конкретных почвенных процессов.

4. Математическое моделирование солепереноса в почве. Среди математических моделей почвообразовательных процессов большое место занимают модели солепереноса в почве. Исследование процессов миграции растворенных веществ в экологической системе «грунтовые воды-почва» является одним из важнейших направлений в современном почвоведении. Оно представляет собой комплекс научных знаний по математической физике, гидродинамике, термодинамике, физико-химической кинетике, молекулярной физике дисперсных систем, мелиорации, почвоведении и т.д. Знание механизма и закономерностей переноса растворенных веществ дает возможность разрабатывать эффективные мероприятия, позволяющие предотвратить засоление почв и опреснять засоленные земли для использования их в сельском хозяйстве. Это объясняется огромной теоретической и практической важностью проблемы засоления почв. В частности математические модели солепереноса в почве могут служить основой для решения важнейших задач мелиорации почв: определение нормы промывок засоленных почв в зависимости от исходного содержания солей, их состава, свойств почв и гидрогеологических условий; выявления оптимального уровня залегания грунтовых вод, исключающего засоление почв; расчета предельно допустимой минерализации вода для орошения [1, 5-6].

На основе прямого и обратного решения модели солепереноса в почве:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta C+\rho b_1+b_2\right)=\theta D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-\theta v\frac{\partial C}{\partial x}-\theta\mu C,$$

$$b_1=kC,\quad \frac{\partial b_2}{\partial t}=-\gamma(C_{\text{н}}-C) \qquad (4)$$

нами разработан *среднеинтегральный метод* определения гидрохимических параметров (шага смешения и коэффициента скорости растворения солей твердой фазы) по среднему засолению водонасыщенных почв заданной мощности до и после промывки по результатам опыта в *лабораторных* и *полевых* условиях [1, 5].

Кроме того, выведена формула для расчета промывных норм по среднему засолению толщи почвогрунтов до и после промывки:

$$N_v=\left(\frac{\theta\eta L}{h_1^2+\eta^2}\right)\left\{\ln\left(\frac{S_0-S_1}{S_t-S_1}\right)+\ln\left[\frac{\sin(2h_1)\sin(2ah_1)}{2a(h_1^2+\eta^2+\eta)}\right]\right\},\ \left(\eta=\frac{L}{4\lambda},\ a=\frac{R}{L}\right), \qquad (5)$$

где S_0 и S_t – осредненное значения начальной и конечной концентрации легкорастворимых солей в промываемой толще $[0,R]$ участка;

S_1 – минерализация промывных вод;

$\eta=L/4\lambda$ – параметра Пекле;

λ – параметр дисперсии;

L – глубина грунтовых вод;

θ – объемная влажность почвы (пористость);

h_1 – корень транцендентного уравнения $\eta ctgh_1=h_1$.

5. Математическое моделирование теплопереноса в почве. Моделированию теплопереноса в почвоведении уделяется большое внимание, так как он оказывает существенное влияние на интенсивность процессов почвообразования, климат и продуктивность экосистем. Постановка и решение различных задач теплопереноса в почвах рассмотрены в работах [4, 10-12]. Так, для решения как прямой задачи теплопереноса в почве (прогноза переноса тепла в почве), так и обратной (определения коэффициента температуропроводности κ по данным полевых или лабораторных экспериментов) исследован классический перенос тепла в почве:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}\quad\left(\kappa=\frac{\lambda}{c_v}\right), \qquad (6)$$

где $\mathrm{T}(x,t)$ – температура почвы в точке x в момент времени t;

λ – коэффициент теплопроводности;

$c_v=\rho c_m$ – объемная теплоемкость почвы;

ρ – плотность почвы;

c_m – удельная теплоемкось.

Для учета влияния фильтрации на изменения теплового поля зоны аэрации почвы, связанные с изменением температуры почвенной поверхности, в работе [12] подробно исследовано одномерное нестационарное уравнение теплопереноса:

$$\left(c_m \rho_m\right)\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_m \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right)\pm\left(c_f \rho_f\right)\frac{\partial\left(q_x \mathrm{T}\right)}{\partial x}, \quad (7)$$

где $\lambda_m -$ коэффициент теплопроводности почвы;

$c_m -$ удельная теплоемкость почвы;

$\rho_m -$ плотность почвы;

$c_v = \rho_m c_m -$ объемная теплоемкость почвы;

$c_f -$ теплоемкость единицы массы воды;

$\rho_f -$ плотность воды;

$q_x = \theta v_x -$ скорость фильтрации;

$v_x -$ средняя скорость движения воды в почвах$

$\theta -$ общая пористость почвы.

На основе решения уравнения (6) и (7) нами получены формулы для оценки точечной и средней температуры в определенной толще почвы. Далее, разработан ряд методов для быстрого и простого расчета коэффициента температуропроводности почвы, с учетом влияния температуры поверхности и наличия или отсутствия инфильтрационного потока [4, 12].

Выводы

Приведенные в работе модели требуют дальнейшего теоретического и экспериментального развития и проверки для различных почвенных условий.

Библиографический список

1. Веригин Н.Н., Азизов К.З., Микайылов Ф.Д. О влиянии граничных условий при моделировании переноса солей в почвогрунтах при промывке // Почвоведение. – 1986. – № 6. – С. 67-73.

2. Дмитриев Е.А. Математическая статистика в почвоведении: учебник / науч. ред. Ю.Н. Благовещенский. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 328 с.

3. Методы Математической биологии // Книга 4. Методы идентификации математических моделей биологических систем. – Киев, 1982. – 192 с.

4. Микайылов Ф.Д., Шеин Е.В. Теоретические основы экспериментальных методов определения температуропроводности почв // Почвоведение. – 2010. – № 5. – С. 597-605.

5. Микайылов Ф.Д. Анализ решений уравнения конвективной диффузии ионов в почве // Почвоведение. – 2012. – № 4. – С. 462-469.

6. Пачепский Я.А. Математические модели физико-химических процессов процессов в почвах. – М.: Наука, 1990. –188 с.

7. Пачепский Я.А. Математические модели процессов в мелиорируемых повах. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 85 с.

8. Розанов Б.Г. Новый этап в развитии почвоведения // Биол. наук. – 1986. – № 2. – С. 35-42.

9. Рыжова И.М. Математическое моделирование почвенных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1987. – 82 с.

10. Чудновский А.Ф. Теплофизика почвы. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

11. Шеин Е.В. Теории и методы физики почв. – М.: Гриф и К, 2005. – 616 с.

12. Шеин Е.В., Микайылов Ф.Д. Теоретические и методические особенности решения задачи теплопереноса при инфильтрации в почве // Вестник ОГУ. – 2011. – № 12. – С. 451-452.

References

1. Berigin N.N., Azizov K.Z., Mikaiylov F.D. O vliyanii granichnykh uslovii pri modelirovanii perenosa solei v pochvogruntakh pri promyvke // Pochvovedenie. – 1986. – № 6. – S. 67-73.

2. Dmitriev E.A. Matematicheskaya statistika v pochvovedenii: Uchebnik / nauch. red. Yu.N. Blagoveshchenskii. Izd. 3-e, ispr. i dop. – M.: Knizhnyi dom «LIBROKOM», 2009.– 328 s.

3. Metody Matematicheskoi biologii // Kniga 4. Metody identifikatsii matematicheskikh modelei biologicheskikh sistem. – Kiev, 1982. – 192 s

4. Mikaiylov F.D., Shein E.V. Teoreticheskie osnovy eksperimental'nykh metodov opredeleniya temperaturoprovodnosti pochv // Pochvovedenie. – 2010. – № 5. – S. 597-605.

5. Mikaiylov F.D. Analiz reshenii uravneniya konvektivnoi diffuzii ionov v pochve // Pochvovedenie. – 2012. – № 4. – S. 462-469

6. Pachepskii Ya.A. Matematicheskie modeli fiziko-khimicheskikh protsessov protsessov v pochvakh. M.: Nauka. – 1990. – 188 s.

7. Pachepskii Ya.A. Matematicheskie modeli protsessov v melioriruemykh pochvakh. M.: Izd-vo MGU, 1992. – 85 s.

8. Rozanov B.G. Novyi etap v razvitii pochvovedeniya // Biol. nauk. – 1986. – № 2. – S. 35-42.

9. Ryzhova I.M. Matematicheskoe modelirovanie pochvennykh protsessov. – M.: Izd. MGU, 1987. – 82 s.

10. Chudnovskii A.F. Teplofizika pochvy. – M.: Nauka, 1976. – 352 s.

11. Shein E.V. Teorii i metody fiziki pochv. – M.: Izd. «Grif i K», 2005. – 616 s.

12. Shein E.V., Mikaiylov F.D. Teoreticheskie i metodicheskie osobennosti resheniya zadachi teploperenosa pri infil'tratsii v pochve // Vestnik OGU. – 2011. – №12. – S. 451-452.